
Math
5158
86.5


HARVARD
COLLEGE
LIBRARY





SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

DIE CONSTRUCTIONEN

DOPPELT BERÜHRENDER KEGELSCHNITTE

MIT

IMAGINÄREN BESTIMMUNGSSTÜCKEN.

EINE WANDERUNG

DURCH DIE

THEORIE DER KEGELSCHNITTE

IN DOPPELTER BERÜHRUNG

AN DER HAND ANSCHAULICHER METHODEN

VON

FRITZ HOFMANN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1886.

Verbesserungen.

Auf Seite 27, Zeile 18 v. u. lies pag. 481 statt pag. 345.

In Figur 46 gehört die Bezeichnung M an die Schnittstelle der Geraden Am mit $\varkappa$ (nicht mit $\varkappa_1$); und entsprechend gehört die Bezeichnung M_1 an die Schnittstelle der Geraden $A_1 m_1$ mit $\varkappa_1$ (nicht mit $\varkappa$).

Vorwort und Inhaltsübersicht.

Der *Zweck* der nachfolgenden Abhandlung ist: eine *Ergänzung* zu bringen für die in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebene Theorie der Kegelschnitte in doppelter und vierpunktiger Berührung durch Mittheilung leicht fasslicher und weittragender Methoden für die Behandlung dieser Theorie; ferner aber die Verwendbarkeit dieser Methoden zu erweisen durch *Erweiterung* der bisher nur für das Gebiet des Reellen ausgebildeten Theorie der Doppelberührung in das Gebiet des *Imaginären* hinüber.

Dem entsprechend wäre als *Inhalt* zu bezeichnen: ein Ueberblick der wichtigsten Sätze der Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung, insbesondere eine Untersuchung ihrer *Uebertragbarkeit in's Gebiet des Imaginären.* Solche Betrachtungen, in denen das Imaginäre eine Rolle spielt, haben immer Zusammenhang mit der metrischen (Kreis-) Geometrie; der Nachweis dieses Zusammenhangs bildet ebenfalls einen Theil des in der Arbeit Gebotenen; sowie schliesslich die Erledigung gewisser Aufgaben *allgemeinen* Charakters, bei welchen imaginäre Bestimmungsstücke vorkommen und welche zugleich mit der Kegelschnitttheorie Zusammenhang aufweisen.

Was die *Anordnung des Stoffs* anlangt, so wurde ein leitender Faden zu Grunde gelegt gedacht, der all' die Lehrsätze und Probleme in ungezwungener Weise verbindet. Und zwar wurde als „Hauptproblem" das folgende gewählt:

Aufgabe: „Methoden anzugeben, nach welchen die zwei reellen Kegelschnitte construirt werden können, die einen vorgegebenen, reellen oder imaginären, Kegelschnitt in zwei verschiedenen — nicht vorgegebenen — Punkten berühren und

zugleich durch drei vorgegebene Punkte gehen, von denen nur einer reell ist, die beiden anderen imaginär.“

Es gibt mehrere Einkleidungen derselben Aufgabe in die Sprache der metrischen Geometrie: wir könnten ebensogut fragen nach jenen beiden Parabeln, welche einen vorgegebenen Punkt als Brennpunkt aufweisen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren (nach dualistischer Uebertragung der Aufgabe); wir könnten auch (und wir wollen uns im Nachfolgenden für gewöhnlich der Bequemlichkeit wegen an diese Sprechweise halten) fragen nach jenen beiden Kreisen, die, einen vorgegebenen festen Kegelschnitt doppelt berührend, durch einen beliebig gegebenen festen Punkt gehen. Wir können auch, zum Raume übergehend, uns vorstellen: eine Gerade g und eine Ebene E, Schnittpunkt P, seien gegeben, die Ebene trage eine elliptische Strahleninvolution mit dem Punkte P als Centrum. Bestimmen wir dann die Kreiskegel, welche jenen Punkt P als Scheitel, jene beliebig vorgegebene Involution als die zur Ebene E in Bezug auf die Kreiskegel gehörige *polare* Strahleninvolution aufweisen und dabei durch g gehen, so haben wir wiederum dieselbe Aufgabe vor uns.

Ueberhaupt war es, wie bei den soeben gegebenen Einkleidungen des Problems, so auch in der nachfolgenden Darstellung der Lösungen unser Bestreben, zwar keineswegs metrische Beziehungen so weit heranzuziehen, dass ihnen etwa Beweiskraft für das Allgemeine zugeschrieben wurde, aber doch andrerseits auch wiederum nicht an der allgemeinen Figur, wie sie die synthetische Geometrie verlangt, immer pedantisch festzuhalten; beide Methoden, die allgemeine und die specialisirende, wechseln in rascher Folge, in der Absicht die *Anschaulichkeit*, als das Hauptziel der folgenden Arbeit, zu sichern. — Es sei aber, um über die *Absicht* der Schrift keine Unklarheit bestehen zu lassen, ausdrücklich wiederholt:

Dem Verfasser scheint weniger die schliesslich erreichte Lösung des übrigens an und für sich vielleicht interessanten Problems wichtig, als vielmehr das reichhaltige Uebungsmaterial an Aufgaben und Sätzen, das sich auf dem Wege zur Lösung

einfindet; mit andern Worten, die Schrift sucht ihren Werth nicht im Schlussresultat, sondern darin, dass sie die ausserordentliche Fruchtbarkeit gewisser im Nachfolgenden fortwährend verwendeter Anschauungsweisen und deren pädagogischen Werth evident zu machen glaubt.

Es ist *erstens* nämlich — um von den *Methoden* des Buches zu sprechen — die Absicht gewesen, den Werth einer aus der darstellenden Geometrie entnommenen Methode für die Darstellung der Theorie doppeltberührender Kegelschnitte wieder einmal zu betonen: die einfachsten, nächstliegenden Betrachtungen — *Betrachtungen* im eigentlichsten Sinne des Wortes, indem man die Raumfigur einer von einer Ebene geschnittenen Fläche zweiter Ordnung *betrachtet* und sich diese Figur niemals anders denken kann, als so, dass das Bild der Schnittcurve den scheinbaren Umfang der Fläche zweiter Ordnung doppelt berührt — liefern zahlreiche Sätze aus der Theorie der Doppelberührung, Sätze, die unübersichtlich erscheinen, so lange die zugehörigen Beweise nicht aus der Ebene herausgehen, — die aber auf das Ungezwungenste sich ergeben, wenn man jene Methode der Betrachtung von einem Aug-Punkte aus auf sie anwendet.

Zweitens aber sollte durch häufiges Zurückgreifen auf metrische Sätze darauf hingewiesen werden, wie der Geometer, der an das Studium synthetischer Probleme herantritt, durch seine Kenntnisse in der elementaren, metrischen, Geometrie bereits sich wichtige Hilfsmittel angeeignet hat, die er eben nur geschickt zu verwerthen braucht, um zu erkennen, dass er damit auch synthetische Aufgaben ganz allgemeinen Charakters übersichtlich und vor Allem methodisch zu behandeln vermag. Die Erfahrung zeigt, dem Schüler wie dem Lehrer, dass nichts so sehr die Phantasie des Lernenden anregt und den Uebergang aus dem speciellen metrischen Gebiet in das allgemeinere der synthetischen Geometrie erleichtert, als das Selbstvertrauen, das aus der Erkenntniss erwächst: mit erlangter Fertigkeit in Behandlung einfacher *elementarer* Aufgaben auch für das Vordringen in die allgemeine Geometrie der Lage unbewusst die Kräfte geschult zu haben. — Und zwar werden wir weniger von jener Vorstellung Gebrauch

machen — sie bildet zwischen Geometrie der Lage und metrischer Geometrie die erste verbindende Brücke —, wonach jeder Kreis durch zwei feste Punkte geht, sondern auf den Raum übergehend, die Erweiterung jener Vorstellung einführen, wonach wir uns alle Kreiskegel denken als einen gewissen festen Kegelschnitt doppelt berührend.

Wie man gerade zu dieser Vorstellung gelangt, wie man sich dieselbe durch ganz einfache geometrische Schlüsse plausibel machen und dem Gedächtnisse einprägen kann, werden wir im Verlauf unsrer Untersuchungen zu zeigen versuchen. Dass eine solche Vorstellung gerechtfertigt ist, wird nicht *vorausgesetzt*, sondern auf verschiedenen einfachen Wegen streng *bewiesen* werden. Indem die Abhandlung einige Beweise dieser fundamentalen Beziehung zwischen Metrik im Raume und allgemeiner Geometrie bringt, die durchaus keinen verwickelten Charakter an sich tragen, glaubt dieselbe eine beim geometrischen Unterrichte sich manchmal fühlbar machende Lücke auszufüllen.*)

---

*) Es sei übrigens ausdrücklich hervorgehoben, dass v. Staudt, „Geometrie der Lage, II, Beiträge", sowie Lüroth „Ueber das Imaginäre in der Geometrie, Math. Ann. VIII und XI", für alle Zukunft Schemata gegeben haben, die die Behandlung geometrischer Aufgaben mit imaginären Bestimmungsstücken zurückführen auf das Operiren mit reellen Dingen. Jene Abhandlungen nehmen allen Aufgaben der synthetischen Geometrie mit imaginären Daten gegenüber etwa dieselbe Stellung ein, wie die Descartes'sche analytische Geometrie gegenüber der Elementargeometrie. Wie die analytische Geometrie fertig dasteht „jede geometrische Aufgabe zu lösen" — um mit ihrem Erfinder zu reden, so gestatten die in den citirten Arbeiten niedergelegten Methoden ein *mechanisches Uebertragen* einer für reelle Bestimmungsstücke bekannten Lösung auch in das Gebiet des Imaginären hinüber, so dass durch sie in der That *alle* das Imaginäre hereinziehenden Aufgaben gleichzeitig als erledigt betrachtet werden dürfen. Es gelingt dies durch eine *Trennung* der auf einem Träger vereinigt liegenden imaginären Elemente, nach welcher Trennung jene beiden ursprünglich scheinbar untrennbar vorgegebenen Elemente als *einzelne Individuen* behandelt werden können — wie *einzelne* reelle Punkte. — Mit dem Hinweis auf obige Abhandlungen sei also von vornherein der Gedanke ausgeschlossen, als ob die Lösung des vorgelegten „Hauptproblems" nicht noch methodischer angestrebt werden könnte, als es im Nachfolgenden geschieht.

In den §§ 1—7 der nachfolgenden Untersuchungen wird der Gedankengang, auf welchem wir uns der Lösung zu nähern suchen, an einigen Beispielen gezeigt, und es werden mehrere später zu verwerthende Sätze besprochen; der § 8 bringt eine vollständige allgemein giltige Lösung des Problems; die zur Lösung nöthigen, nur in der *Ebene* auszuführenden, Constructionen werden im Zusammenhange mitgetheilt. In den §§ 9—11 wurde ein Excurs über den Zusammenhang zwischen der Geometrie der Kugelkreise oder der Kreiskegel mit jener der doppeltberührenden Kegelschnitte eingeschaltet. Es folgt hierauf in den §§ 13—15 eine weitere Lösung des Problems — mit Zuhilfenahme des *Raumes* —, eine Lösung, deren Anwendung sich bei besonderer Lage der vorgegebenen Bestimmungsstücke der Aufgabe besonders empfiehlt. In den Schlussparagraphen §§ 16—20 folgt eine dritte Lösung des Problems — wiederum mit Hülfe von Operationen im Raume, mit ausführlicher Erwähnung der Fälle, in welchen diese zweite Methode zu empfehlen.

Im Allgemeinen wurde die Vorstellung festgehalten, dass ein Kreis gefordert wird, der — durch einen festen Punkt gehend — einen Kegelschnitt doppelt berührt; die beiden verwandten Aufgaben über Parabel, resp. Kreiskegel (vergl. die ersten Zeilen der Einleitung) finden im Verlaufe der Untersuchung gelegentliche mehrfache Erwähnung und Erledigung. — Die §§ 21—25 bilden einen Anhang über vierpunktige Berührung.

München, im Frühjahre 1886.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

§ 1.

„Wir versuchen das Problem der Bestimmung des doppelt berührenden Kegelschnitts durch drei *reelle* vorgegebene Punkte derart zu behandeln, dass wir bei der Discussion der Lösung für den Fall von drei reellen Punkten ausser den gewöhnlich beachteten noch *weitere* Bestimmungsstücke in der Figur der Lösung, von gewissem Zusammenhang mit den von vornherein gegebenen Bestimmungsstücken entdecken.

D. h. wir wollen gewisse, für gewöhnlich nicht wichtige, Beziehungen zwischen den Theilen der Figur aufsuchen, Beziehungen, die so beschaffen sein müssen, dass sie durch reelle Operationen darstellbar *bestehen bleiben*, wenn von den gegebenen Bestimmungsstücken, den drei reellen Punkten, zwei *imaginär* werden.“

Dies sei der uns zunächst leitende Gedankengang.

Um an einem Beispiele deutlich zu machen, wie manchmal für eine Aufgabe der synthetischen Geometrie solche Beziehungen zwischen den Theilen einer reell gezeichneten Figur bestehen, wie schliesslich also eine Lösungsmethode gefunden werden kann, die unabhängig besteht vom Charakter der Bestimmungsstücke, ob reell oder nicht — soll einmal der ganz einfache Fall betrachtet werden:

„Gegeben von einem Kegelschnitte zwei *reelle* Punkte A, B, der Pol P von AB, sowie ein dritter Punkt C.“

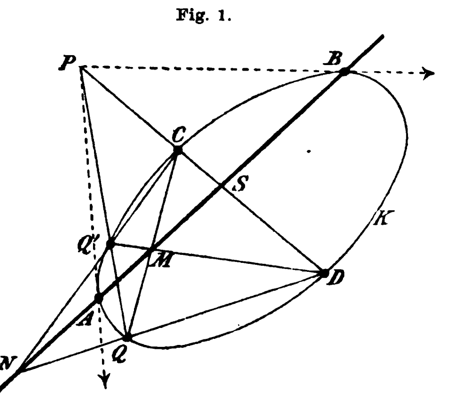
Um den Kegelschnitt linear zu construiren, genügt der Pascal'sche Satz, denn die Geraden AB, BP sind Tangenten des gesuchten Kegelschnitts, die in A, B berühren; mit dem Punkte C zusammen gibt das fünf Bestimmungsstücke.

Lassen wir dagegen die Verbindungsgerade AB selbst zwar reell bleiben, während die Punkte A und B jedoch *imagi-*

när werden (zugleich sei gegeben, wie vorher, ein Punkt P als Pol von AB, sowie ein weiterer Punkt des Kegelschnitts, C), so lässt sich die Figur des Pascal'schen Sechsecks nicht mehr anwenden, während doch die Aufgabe eindeutig bestimmt, ja sogar, wie wir gleich sehen werden, linear lösbar bleibt.

Wir versuchen nun die Figur mit reellen AB so zu behandeln, dass Beziehungen auftreten, die auch bei imaginären AB weiter bestehen (Fig. 1).

Fig. 1.



Erste Lösung. Es sei vorgegeben A, B, der Pol P von AB, ferner C; gesucht der Kegelschnitt K. Zunächst finden wir den Punkt D als denjenigen, der mit C harmonisch getrennt wird von P und S. Indem man die vier harmonischen Punkte $PCSD$ vom Punkte A aus auf den Kegelschnitt projicirt, erhält man vier Punkte $ACBD$ —; betrachtet man dieselbe vom Punkte Q aus, so erkennt man, dass $AMBN$ ebenfalls vier harmonische Punkte sind, wenn Q ein Punkt des zu suchenden Kegelschnitts.

„Umgekehrt hätte man Q erhalten, wenn man zwei zu AB harmonisch gelegene Punkte MN mit C und D verbunden und die Verbindungslinien zum Schnitt gebracht hätte."

Diese Construction von Curvenpunkten Q ist aber unabhängig davon, dass A und B gerade *reell* gezeichnet vorliegen: die Punkte M und N sind eben zwei Punkte der Geraden AB, die conjugirt sind in Bezug auf den unbekannten Kegelschnitt K; solche Punktepaare MN können reell construirt werden, ganz unabhängig davon, ob AB den Kegelschnitt schneidet oder nicht; sie können auch construirt werden, wenn der Kegelschnitt noch gar nicht selbst bekannt ist, wenn nur die ihm zugehörige polare Involution auf dem Träger AB genügend bestimmt ist.

Dies letztere ist der Fall, wir setzen ja eine elliptische

Involution auf dem Träger AB als gegeben voraus, die die imaginären Punkte AB als Ordnungselemente besitzt.

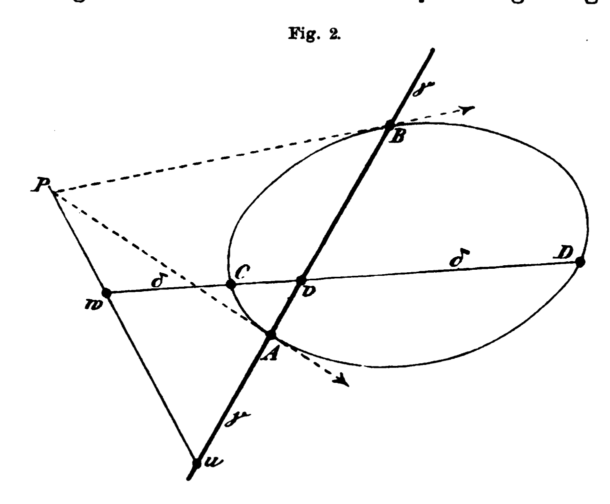
„Ist demnach von einem Kegelschnitte K gegeben: die Gerade AB mit zwei imaginären Punkten AB, C reell, P als Pol des Trägers AB, so suche man zunächst D auf PC als vierten harmonischen Punkt zu PCS. Hierauf bestimme man auf AB beliebige Punktepaare MN, die der Involution AB angehören, und verbinde C mit M, D mit N (oder auch C mit N, D mit M). Der Schnittpunkt Q (oder auch Q') der so bestimmten Verbindungsgeraden ist ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts.“

Diese Construction ist aus der elementaren Geometrie her bekannt; es ist die Lösung der Aufgabe: einen Kreis zu construiren mit gegebenem Mittelpunkte P, durch einen Punkt C. Will man dazu den Zirkel nicht anwenden, setzt jedoch zwei beliebige rechte Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel in irgend einer Gegend der Zeichnungs-Ebene als gezeichnet voraus, sowie die Möglichkeit ein Instrument zu benutzen, das Parallellinien zu ziehen gestattet, so kann ein solcher Kreis *linear* construirt werden. Man sucht zu dem einen Endpunkte C des Durchmessers durch Construction eines vierten harmonischen Punktes den andern D (der unendlich ferne Punkt des Durchmessers, C, P, D sind harmonisch) —; hierauf zieht man durch C und D Linien, die paarweise auf einander senkrecht stehen. Jeder Schnittpunkt eines solchen Linienpaares gibt einen Punkt des Kreises. Um aufeinander senkrecht stehende Gerade zu construiren, die durch C einerseits, durch D andererseits gehen, genügt das Lineal unter obigen Voraussetzungen.

Zweite Lösung. Man kann auch so verfahren: es sei vorgegeben A, B auf γ, mit dem Pole P von γ, sowie C (Fig. 2). Wenn D einen Punkt des zu suchenden Kegelschnitts bedeutet, v den Schnittpunkt von CD oder δ mit der vorgegebenen Geraden AB oder γ, so ist leicht ersichtlich, wie zu einem beliebig auf γ angenommenen Punkte v die Polare Pwu aus den vorgegebenen Bestimmungsstücken erhältlich ist, wonach dann die Bestimmung von D als des zu

wCv gehörigen vierten harmonischen Punktes keine Schwierigkeit mehr macht. Denn jene Polare eines auf γ angenommenen Punktes v geht erstens durch den auf γ zu v gehörigen con-

Fig. 2.



jugirten Punkt u, der sich mit Hilfe der, reellen oder imaginären, Punkte AB findet, andrerseits durch P. — „Man findet beliebig viele Curvenpunkte D, indem man beliebige Gerade δ durch C legt, welche den Träger γ in v treffen, zu welchem v sich das conjugirte u durch die vorgegebene Involution der Punkte AB bestimmt. Pu ist dann Polare von u, demnach der vierte harmonische Punkt zu wCv ein Curvenpunkt D."

Genau mit denselben Hilfsmitteln wäre etwa die Aufgabe zu lösen: eine Parabel zu construiren, wenn gegeben Brennpunkt und Directrix.

§ 2.

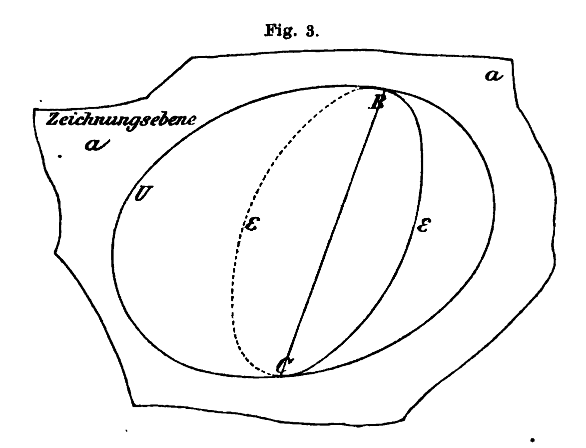
Was uns für das kleine Beispiel des vorigen Paragraphen gelang, werden wir auch später für das eigentliche uns vorgelegte Problem durchzuführen versuchen: wir werden die Figur der reellen Lösungen möglichst vollständig entwerfen und aus ihren Bestandtheilen solche aussuchen, die beim Imaginärwerden von zwei Bestimmungsstücken reell bleiben.

Um die zu Grunde gelegte Figur der reellen Lösungen

(§ 8, Fig. 13) vorzubereiten, sind einige Sätze der Theorie der doppeltberührenden Kegelschnitte vorauszuschicken; die im Nachfolgenden mitgetheilte Methode vermag uns bequeme Uebersicht über dieselben zu verschaffen.

Betrachten wir von einem Punkte A ausserhalb einer Fläche zweiter Ordnung (etwa eines Ellipsoids) dieselbe, und suchen wir das in unsrer Seele entstandene Bild durch eine ebene Zeichnung wiederzugeben, so bildet sich jene Fläche ab durch eine Umfangscurve, einen Kegelschnitt, U (Fig. 3). Dieser Kegelschnitt fällt zusammen mit der Schnittcurve jener

Fig. 3.



Fläche zweiter Ordnung und der Polarebene a unsres Auges in Bezug eben auf jene Fläche.

(Deutlicher: eigentlich erblicken wir ja in der ganzen uns umgebenden Natur nur *Winkelgrössen,* niemals Längenausdehnungen; von jedem Körper wird uns das Bild übermittelt durch einen ihn projicirenden *Kegel,* und nur zur Bequemlichkeit ersetzen wir bei der Abbildung eines Dinges diesen Kegel durch einen seiner ebenen Schnitte. Die soeben genannte Polarebene a des Augpunktes A zeichnet sich nun dadurch aus, dass ihr räumlicher Schnitt mit der Fläche zweiter Ordnung ohne weiteres auch ein solches „Bild" ist; denn wird von einem ausserhalb eines Ellipsoids gelegenen Punkte A aus jener Kegel construirt, der das Ellipsoid berührend um-

schliesst, so gehen die Erzeugenden dieses Kegels bekanntlich durch eine gewisse ebene Curve, den Schnitt der Polarebene a mit der Fläche. Damit ist es auch gerechtfertigt, wenn wir später die Ebene a manchmal die „Zeichnungsebene" nennen werden.)

Wir schneiden nun das Ellipsoid mit einer im Raume so gelegenen Ebene E, dass sie jene Schnitt- (oder Umfangs)-Curve U reell schneidet; — die Projection ihrer Schnitttcurven mit der Fläche zweiter Ordnung auf die Zeichnungsebene wollen wir ε nennen —; wir wollen dann einen Punkt längs der neuerhaltenen räumlichen Schnittcurve sich bewegen lassen und seine Bewegung vom Auge aus derart controliren, dass wir jeden Ort des auf der Curve herumgeführten Punktes auf die Zeichnungsebene a projiciren. Der Fusspunkt dieser Projection wird ebensowenig jemals aus dem Umfange des „Bildes", aus der Curve U, heraustreten, als der projicirende Strahl aus dem das Ellipsoid umschliessenden Kegel heraustritt, denn *alle* Punkte der Fläche werden ja vom Auge durch Strahlen projicirt, die eben innerhalb jenes Kegels liegen. An zwei Stellen im Raum tritt jene räumliche Schnittcurve der Ebene E mit der Fläche hinüber über die Schnittcurve U derselben Fläche mit der Ebene a. Diese beiden Schnittpunkte, BC, der beiden räumlichen Curven können im Auge kein andres Bild hervorbringen, als dass dort eben die Projection ε mit U einen Punkt, B oder C, gemeinschaftlich hat.

Da aber *nach* dem Uebergang des bewegten Punktes über jene kritischen Stellen B oder C hinweg seine Projection immer noch ins Innere der Bildcurve U fällt, so haben wir zu schliessen, dass die beiden Curven ε und U sich in einem solchen Punkte B resp. C *berühren*. Dies bedarf weiter keines Beweises: mit der soeben mitgetheilten Beschreibung des Vorgangs wurde nur die *Definition* der Berührung zweier Curven wiederholt.*)

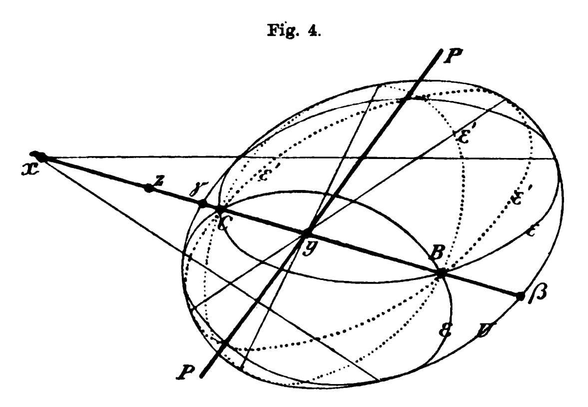
*) Staudt, Geometrie der Lage, Bd. I, S. 2:

„5. Zwei Linien, welche in einer und derselben Fläche liegen, und durch einen und denselben Punkt gehen, $\left\{\begin{matrix}\text{berühren}\\\text{schneiden}\end{matrix}\right\}$ sich in diesem Punkt, wenn die ihm zunächst liegenden Theile einer jeden von den beiden Linien auf $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzter}\end{matrix}\right\}$ Seite(n) der andern liegen."

Wir fassen das bisher Gewonnene zusammen, indem wir sagen: „Eine Fläche zweiter Ordnung mit einer durch eine Ebene auf ihr erzeugten Schnittcurve gibt vom Augpunkt *A* aus betrachtet das Bild, die Figur, von zwei sich in zwei Punkten berührenden Kegelschnitten.“

Mit Hilfe dieses einfachen Gedankengangs werden wir alle nunmehr einzuführenden Sätze über doppeltberührende Curven leicht entwickeln.*) Zeichnen wir zwei Punkte *B* und *C* willkürlich in das Innere einer Ellipse *U* hinein (Fig. 4), so sind sie uns nunmehr das Bild von auf der Oberfläche

Fig. 4.



eines Ellipsoids gelegenen Punkten, über deren Vertheilung, ob oberhalb oder unterhalb der Zeichnungsebene, uns allerdings die Zeichnung nicht belehrt; so dass wir also selbst darüber noch bestimmen können, auf welcher Hälfte des Ellipsoids wir uns jene Raumpunkte gelegen denken, deren Bilder die Punkte *B* und *C* sind.

Es sei für den nächsten Augenblick angenommen, dass die beiden *Raumpunkte BC* auf der obern, d. h. dem Auge zugewendeten, Hälfte des Ellipsoids liegen.

---

*) Man vergleiche, was die im Folgenden mitgetheilten Sätze anlangt (nicht die Methoden), etwa

Steiner's Werke, herausgegeben von Weierstrass; II. Bd. S. 469: „Allgemeine Betrachtungen über einander doppeltberührende Kegelschnitte“; ferner

Milinowski, „Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte“; S. 307 ff.

Alle Ebenen durch die Verbindungsgerade BC schneiden dann, im Raume, das Ellipsoid in Kegelschnitten, die vom Augpunkt A aus als U doppelt berührend erscheinen. Die (Raum-) Schnittgeraden dieser verschiedenen Ebenen mit der Zeichnungsebene a enthalten immer die beiden Punkte, wo die räumlichen Schnittcurven jener Ebenen über die Umfangscurve U hinüber gehen. Diese Schnittgeraden projiciren sich also von A aus als Verbindungslinien der Berührpunkte je eines U doppelt berührenden Kegelschnitts, d. h. als *Berührsehnen* beweglicher Kegelschnitte ε.

Alle diese Schnittgeraden (im Raume) der unendlich vielen Ebenen durch BC mit der Ebene a gehen durch einen festen Punkt des Raumes, nämlich den Schnittpunkt x der räumlichen Verbindungsgeraden BC mit der Zeichnungsebene a. Daher wissen wir bereits:

„Alle Kegelschnitte ε, die, durch zwei feste Punkte im Innern einer Ellipse gehend, dieselbe doppelt berühren (und stetig in einander übergeführt werden können), liefern Berührsehnen, die durch einen festen Punkt x auf der Verbindungslinie jener beiden festen Punkte gehen."

Indem wir nun die Beschränkung aufheben, dass die Raumpunkte B und C gleichzeitig der oberen, dem Auge zugewendeten Hälfte des Ellipsoids angehören sollen, indem wir im Gegentheile bestimmen, dass zwar C auf der obern Hälfte, B dagegen auf der untern (der vom Auge abgewendeten) Hälfte der Fläche zweiter Ordnung liegen soll, bekommen wir eine neue Schaar von unendlich vielen Ebenen durch die *neue* Raumgerade BC, die nun ihrerseits wieder durch Erzeugung von Schnittcurven auf dem Ellipsoid und deren Projectionen von A aus eine Schaar von (in der Figur punktirt gegebenen) weitern doppelt berührenden Kegelschnitten ε' liefern.

Auch für diese zweite Schaar von Kegelschnitten sind die Berührsehnen die Bilder der räumlichen Schnittgeraden der beweglichen Ebenen durch BC mit der Zeichenebene, gehen also, wie jene Raumgeraden selbst, durch einen festen Punkt y, durch das Bild des Schnittpunktes der räumlichen Verbindungslinie BC mit der Zeichnungsebene A.

Daher die Erweiterung des oben gegebenen Satzes: „Durch zwei feste Punkte im Innern eines Kegelschnitts geht, nachdem die Existenz einer ersten solchen Schaar nachgewiesen, noch eine zweite Schaar von doppelt berührenden Kegelschnitten (die übrigens in jene erstgefundene Schaar nicht auf stetige Weise übergeführt werden kann). Sämmtliche Berührsehnen auch dieser Kegelschnitte gehen durch einen festen Punkt y auf der Verbindungslinie der vorgegebenen Punkte.“

§ 3.

Die beiden Punkte xy haben eine bestimmte ausgezeichnete Lage zur Curve U, sowie zu den fest vorgegebenen Punkten BC; wir wollen dies an der Hand derselben Figur besprechen.

Wir legen durch das Auge die Polarebene P von x in Bezug auf das Ellipsoid. (Dieselbe kann deswegen durch das Auge gelegt werden, weil ja x auf der Zeichnungsebene, der Polarebene des Augpunktes A gelegen ist.) Die Gerade xCB der Figur 4 ist nun das Bild von zwei Raumgeraden; erstens nämlich das Bild der wirklich *im Raume* verlaufenden Verbindungsgeraden der auf dem Ellipsoid gelegenen *Raumpunkte* BC, zweitens das Bild einer darunter *auf der Zeichnungsebene* verlaufenden Raumgeraden $\gamma\beta$, welch letzteres Bild sich übrigens mit seinem Originale deckt ($\gamma\beta$ stelle zwei Punkte der Zeichnungsebene vor, die gleichfalls mit ihren Bildern identisch sind). Für die räumlichen Durchstosspunkte dieser beiden verschiedenen Raumgeraden mit der Fläche des Ellipsoids haben wir die Bilder CB einerseits, $\gamma\beta$ andererseits (auf der *ebenen* Figur, Nr. 4, auf dem *ebenen* Bilde aller dieser Raumverhältnisse).

Nach den Elementen der Polarentheorie für Flächen zweiter Ordnung trennt dann der Punkt x nebst seiner Polarebene P erstens einmal die beiden auf dem Ellipsoid gelegenen Raumpunkte $\gamma\beta$ harmonisch, dann aber auch das Paar der Raumpunkte CB auf dem Ellipsoid.

Demzufolge müssen auch die *Bilder* von x und P, nämlich der Bildpunkt x auf der ebenen Figur, Nr. 4, sowie die

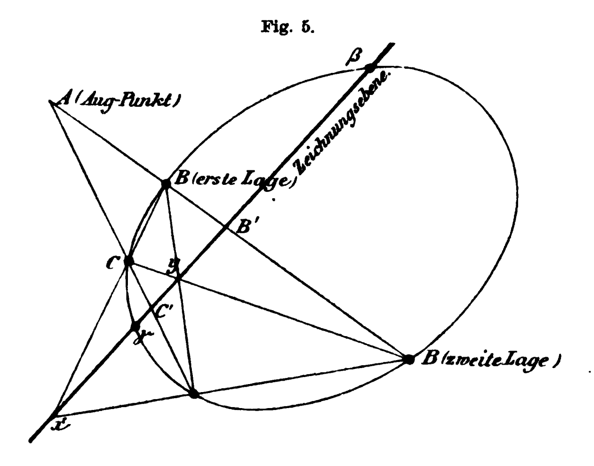
die Ebene P abbildende *Gerade* P die Bilder jener Raumpunkte harmonisch trennen, d. h. sowohl die Bildpunkte $\gamma\beta$ (diesmal auf der ebenen Zeichnung gemeint), als auch CB (diesmal ebenfalls nicht die Raumpunkte CB bezeichnend, sondern deren Bildpunkte auf der ebenen Zeichnung der Figur Nr. 5) harmonisch trennen.

Daher ist x einer der beiden Punkte, die sowohl $\gamma\beta$, als auch CB (in der ebenen Zeichnung) harmonisch trennen; dasselbe gilt von y.

„In der Figur der doppelt berührenden Kegelschnitte durch zwei feste Punkte CB sind die festen Punkte xy, durch welche alle Berührsehnen gehen, dadurch ausgezeichnet, dass sie sowohl jene Punkte CB harmonisch trennen, als auch die Punkte $\gamma\beta$, in welchen die Verbindungsgerade CB den vorgegebenen Kegelschnitt trifft.“

Viel einfacher gestaltet sich der Beweis, wenn wir uns einen Augenblick gestatten, die der Figur 4 zu Grunde liegende *Raumfigur* des Ellipsoids mit all' ihren Raumgeraden und

Fig. 5.



Raumpunkten, sowie mit der Zeichnungsebene und schliesslich mit dem Augpunkte A selbst von der Seite aus zu betrachten. (Fig. 5.)

A bedeute den Augpunkt, C' und B' die auf der Zeichnungs-

ebene $x\gamma\beta$ gelegenen Punkte, in welchen die Geraden AC, AB diese Ebene durchstossen.

Dass nun x und y sowohl die Punkte $\gamma\beta$ als auch $C'B'$ harmonisch trennen, d. h. dass x und y, von A aus betrachtet, sowohl die Punkte $\gamma\beta$ als auch CB harmonisch zu trennen scheinen, ist nach den ersten Principien der Polarentheorie evident. ($x\gamma y\beta$ sind harmonisch, weil nach der Figur x und y polar conjugirt sind in Bezug auf den Kegelschnitt, welchem γ und β angehören; $xC'yB'$ sind es wegen der Eigenschaften des vollständigen Vierecks.)

Anm. Umgekehrt kann man die Figur 5 zur Lösung der folgenden Aufgabe benutzen: „Die beiden Punkte x und y *zu finden*, welche gleichzeitig zwei Punktepaare $\beta\gamma$ und $B'C'$ desselben Trägers harmonisch trennen.“ Ich überlasse die Ausführung dieser kleinen Bemerkung dem Leser, indem ich erwähne, dass die resultirende Lösung versagt für den Fall, wo *beide* Punktepaare $\beta\gamma$ und BC gleichzeitig imaginär werden. Wegen der Lösung für diesen Fall vgl. § 6, Anm. 1.

§ 4.

„Werden von einem Punkte z auf der Verbindungslinie zweier Punkte BC aus die Tangenten gelegt an alle jene Kegelschnitte, welche (*einer* der beiden möglichen Schaaren angehörend) durch jene beiden festen Punkte BC gehen und zugleich einen festen Kegelschnitt U doppelt berühren, so liegen die Berührpunkte aller dieser Tangenten auf einem Kegelschnitte, welcher wiederum U doppelt berührt.“

Obwohl dieser Satz keinen Zusammenhang mit den uns beschäftigenden Untersuchungen aufweist, sei sein Beweis nach der eben geschilderten Methode der „Betrachtung“ hier eingefügt, um für die Verwendbarkeit derselben ein Beispiel zu geben.

Wir kehren zur Figur 4 zurück, wo der Punkt z auf BC markirt wurde, während allerdings die Tangenten an die Kegelschnitte ε weggelassen sind, um die Figur nicht allzusehr zu verwickeln.

Es wird also behauptet, dass die Berührpunkte der an

die ε möglichen Tangenten durch z wiederum einen neuen, U doppelt berührenden Kegelschnitt ergeben. Zum Beweise brauchen wir uns die *ebene* Figur Nr. 4 nur *körperlich* zu denken. U ist das Bild eines Ellipsoids, $xzCB$ eine Raumgerade, die das Ellipsoid in zwei, auf der oberen Hälfte gelegenen, Raumpunkten C, B, trifft; z ist ein nicht mehr in der Zeichnungsebene gelegener, sondern ein etwas über dieselbe gehobener Punkt dieser Geraden.

Wir können uns fragen, ob uns die Figur Mittel genug darbietet, um die Berührpunkte alle zu finden für die von z aus an das Ellipsoid gelegten Tangenten. In der That können dieselben angegeben werden. Um solche Berührpunkte zu finden, wird man Ebenen durch z legen, welche die Fläche zweiter Ordnung in Kegelschnitten schneiden und an diese Kegelschnitte die Tangenten von z aus legen. Solche Ebenen, resp. deren Schnittfiguren, enthält bereits die Figur, es sind eben die Kegelschnitte ε der Figur die Bilder jener räumlichen Schnittcurven; die Berührpunkte der auf der *ebenen* Figur Nr. 4 an die Kegelschnitte ε möglichen Tangenten von z aus sind die Bilder der *räumlichen* Berührpunkte. Nun weiss man, dass die räumlichen Berührpunkte jener Tangenten an das Ellipsoid alle *auf einer Ebene gelegen* sind, der Polarebene von z, demnach dem Auge einen Kegelschnitt zu erfüllen scheinen, der insbesondere auch U doppelt berührt (vgl. Fig. 3). Damit ist eben unser Satz bewiesen; um zu wiederholen: jene in der *ebenen* Figur construirten Berührpunkte an die ε sind Bilder gewisser Raumpunkte; und *weil* anderweitig bekannt ist, dass diese Raumpunkte *einer Ebene* angehören, so müssen diese Bilder umgekehrt wieder einem doppelt berührenden Kegelschnitt anzugehören scheinen.

§ 5.

Wir kehren nach dieser Abschweifung zu einigen Sätzen zurück, die später Verwendung finden sollen. Die beiden ersteren derselben wiederholen einige Resultate des § 2 in neuer Fassung.

Die Figur 6a zeigt zwei Kegelschnitte vom Typus ε',

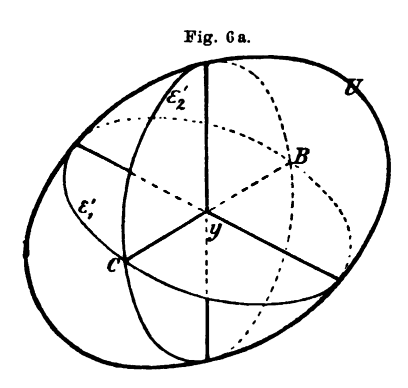
welche, durch B und C gehend, eine Ellipse U doppelt berühren.

Die ebene Figur ist das Bild zunächst des folgenden Vorgangs im Raume: ein Ellipsoid U wurde von zwei Ebenen, ε_1', ε_2', geschnitten und die so erhaltene Raumfigur einer Fläche zweiter Ordnung mit zwei Schnittcurven vom Augpunkte aus betrachtet.

Die drei Ebenen: 1) die Zeichnungsebene; 2) ε_1' und 3) ε_2' schneiden sich *im Raume* in *einem* Punkte, durch welchen auch ihre Schnittgeraden gehen.

Durch einen und denselben Punkt gehen also auch in der *ebenen* Zeichnung (Fig. 6a) die drei Geraden: 1) BC als das Bild der räumlichen Schnittgeraden der Ebenen ε_1', ε_2'; 2) die Berührsehnen des einen Kegelschnitts ε_1'; sie ist das Bild (das sich übrigens mit seinem Originale deckt) der Schnittgeraden der Ebene ε_1' mit der Ebene der Zeichnung, sowie 3) die Berührsehne von ε_2' aus demselben Grunde.

Fig. 6a.



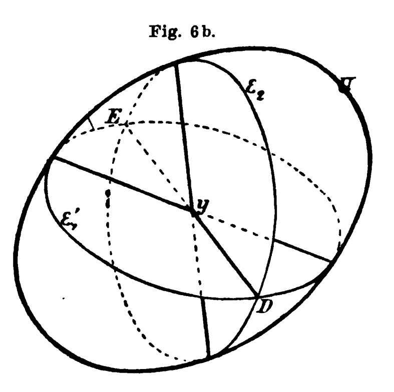
Daher der Satz:

„Durch den Schnittpunkt y der zwei Berührsehnen zweier doppelt berührender Kegelschnitte $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$ geht die Verbindungslinie BC zweier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte.“ — (Ist auch nach § 3 evident.)

Durch denselben Schnittpunkt y geht aber noch eine solche Verbindungslinie zweier Schnittpunkte. Um dies zu erkennen, braucht man nur dieselbe ebene Figur anders zu interpretiren: in Fig. 6b wurde durch eine neue Schattirung der Theile der Figur angedeutet, wie dieselbe Figur, mit sich selbst congruent bleibend, dienen kann zur Abbildung ganz neuer Vorgänge im Raume. Indem wir wegen des Beweises ohne Weiteres auf das oben Gesagte verweisen, wird der Satz evident:

„Durch denselben Schnittpunkt y der Berührsehnen geht noch eine weitere Verbindungsgerade von zwei weiteren Schnittpunkten D und E der vorgegebenen Kegelschnitte; in y schneiden sich also vier Linien der Figur.“

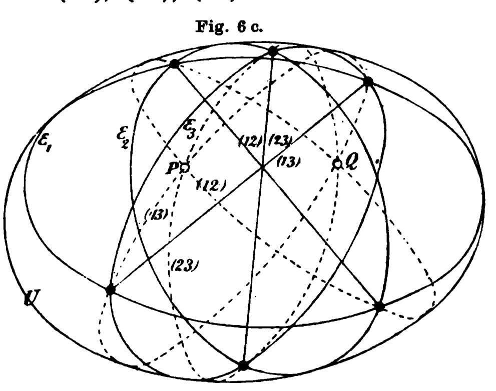
Fig. 6b.



Anm. Sind drei Kegelschnitte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ gegeben, welche einen vierten U doppelt berühren, so enthält die Figur $3 . 4 = 12$ gemeinschaftliche Punkte von je zweien dieser Kegelschnitte ε. Indem man immer zwei solcher Schnittpunkte verbindet, wenn sie demselben Kegelschnittpaare angehören, erhält man eine complicirte Figur von vielen sich durchkreuzenden Linien, welche dadurch bemerkenswerth ist, dass je drei solcher Verbindungslinien sich in *einem* Punkte schneiden.

In der Figur 6c sind drei solche Verbindungslinien wirklich construirt und durch (12), (13), (23) bezeichnet. Um zu beweisen, dass sich dieselben in einem Punkte treffen, genügt es, die ebene Figur richtig zu „betrachten“, d. h. dieselbe als Bild gewisser Constructionen *im Raume* anzusehen. Hierauf erscheint der Satz nichts anders als eine Anwendung der banalen Thatsache, dass sich drei Ebenen $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ immer in einem Punkte schneiden, durch welchen auch die drei Schnittgeraden der Ebenen gehen. Gewiss darf dem Leser die kleine Mühe überlassen bleiben, durch richtiges Schattiren der Bestandtheile der Figur jene Lage der Ebenen

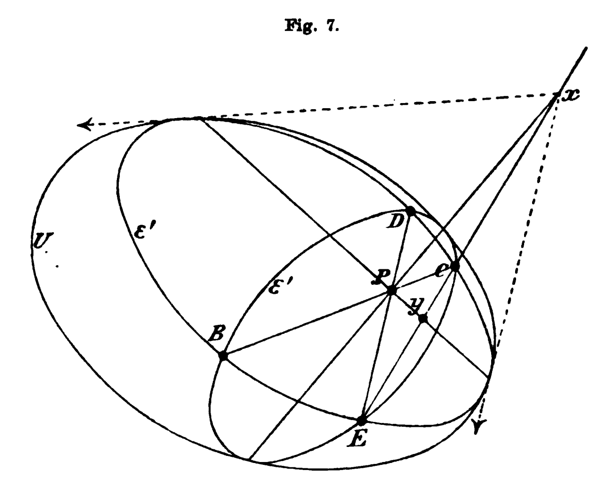
Fig. 6c.



zu charakterisiren und sich zu verdeutlichen, welche den zu beweisenden Satz als einen selbstverständlichen erscheinen lässt.

Es seien nun, indem wir uns zur Fig. 7 wenden, zwei Kegelschnitte ε' in doppelter Berührung mit U, mit den Schnittpunkten $BCDE$, gezeichnet. Ihre Berührsehnen treffen die Gerade CE einerseits in x, andrerseits in y, P sei der Schnittpunkt der Berührsehnen, durch welchen nach den Sätzen

Fig. 7.



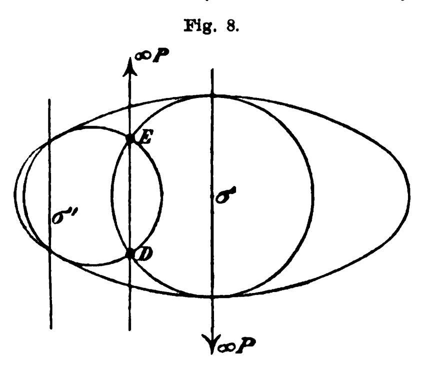
dieses Paragraphen sowohl die Verbindungsgerade BC geht, als auch DE. Von P aus betrachtet erscheinen die vier Punkte $EyCx$ als harmonische (§ 3), daher der wichtige Satz: „Die Berührsehnen zweier doppelt berührender Kegelschnitte werden harmonisch getrennt durch die beiden durch ihren Schnittpunkt möglichen Verbindungslinien von Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte.“

Mit der Erkenntniss dieses Satzes ist ein erster Schritt zur Erledigung der uns eigentlich vorgelegten Aufgabe gethan. Wir wollen, späteren Constructionen vorgreifend, die Figur 8 ins Auge fassen, welche zwei Kreise vorstellt, die eine vorgegebene Ellipse doppelt berühren.

Die Kreise schneiden sich in zwei sichtbaren Punkten DE, ferner noch in den unsichtbaren Kreispunkten BC. Dass nun die drei Geraden, nämlich DE und dann noch die beiden

Berührsehnen $\sigma\sigma'$ durch einen und denselben (unendlich fernen) Punkt P von DE gehen, kann noch aus den Symmetrieverhältnissen der Figur abgeleitet werden. Nach unserm soeben allgemein ausgesprochenen Satze sind aber *die Berührsehnen* $\sigma\sigma'$ *gleichweit von der Secante* DE *entfernt:* diese Bemerkung ist viel wichtiger und könnte ohne das Vorausgegangene nicht mehr ohne Weiteres plausibel gemacht werden.

Fig. 8.



§ 6.

Nach der Ableitung obigen Satzes verlassen wir die Besprechung unserer Projectionsmethoden, um uns einigen weiteren Hilfsaufgaben zuzuwenden.

(Fig. 9.) „Es sei gegeben ein Kegelschnitt K und zwei Gerade $\alpha\beta$ durch einen Punkt A: man construire die Gegenseitenschnittpunkte MN jenes Vierecks, welches die vier Schnittpunkte von K mit den Geraden $\alpha\beta$ bilden, *für den Fall, dass die beiden Geraden* $\alpha\beta$ *imaginär werden.*"

Fig. 9.

Hier ist die Auswahl von Beziehungen, die nach dem Imaginärwerden von $\alpha\beta$ die Punkte MN auf der Polaren a des Punktes A noch liefern, leicht zu treffen.

Der Figur ist unmittelbar zu entnehmen, dass die beiden Punkte MN sowohl polar conjugirt sind in Bezug auf K

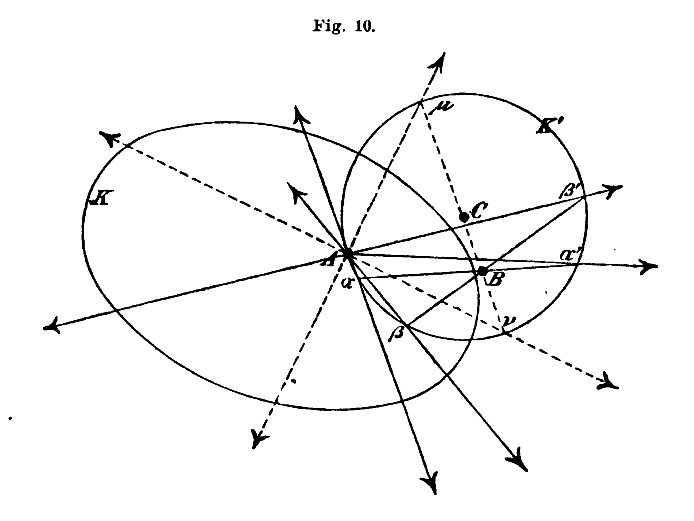
(AN ist direct als Polare von M ersichtlich), als auch harmonisch getrennt von den Geraden α und β, nach den Eigenschaften des vollständigen Vierecks.

Ist daher die Involution durch A als eine elliptische mit den imaginären Ordnungsstrahlen $\alpha\beta$ vorgegeben, so existiren doch die Punkte MN auf a reell, ob nun A selbst ausser- oder innerhalb K liegt.

(Sie sind eben die beiden Punkte, welche sowohl der von der Strahlinvolution $\alpha\beta$ auf a bestimmten Involution angehören, als auch der zum Kegelschnitte K gehörigen, polaren, Involution. Solche gemeinschaftliche Punktepaare zweier Involutionen existiren *reell*, wenn die eine der beiden Involutionen eine elliptische ist.*))

Anm. 1. Hier sei die Lösung einer öfters auftretenden Aufgabe eingefügt (Fig. 10).

Fig. 10.



Es sei gegeben ein Kegelschnitt K, ein Punkt A (innerhalb oder ausserhalb K), sowie eine elliptische Involution mit dem Centrum A, beispielsweise die der rechten Winkel — man soll das gemeinschaftliche Strahlenpaar angeben für diese

*) Nach Staudt „Geometrie der Lage" Band I, § 23, 309, am Schlusse.

rechtwinklige Involution, sowie für die dem Punkte A in Bezug auf K zugehörige polare Involution (man soll auf der Polaren von A zwei Punkte MN so bestimmen, dass sie conjugirt sind in Bezug auf K und gleichzeitig von A aus unter rechtem Winkel erscheinen).

Zur Lösung*) lege man durch A einen Kreis, K', der von zwei Paaren conjugirter Geraden durch A getroffen werde in $\alpha\alpha'$, sowie $\beta\beta'$. Construirt man den Schnittpunkt der Verbindungslinien von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ — derselbe sei B genannt —, so liefert derselbe weitere conjugirte Geraden durch A in einfacher Weise: man braucht nur eine beliebige Gerade durch B den Hilfskreis K' schneiden zu lassen und deren beide Schnittpunkte mit A zu verbinden. Verbindet man insbesondere B mit dem Mittelpunkte C des Hilfskreises, so dass als Schnittpunkte auf letzterem die Punkte $\mu\nu$ entstehen, so hat man in den beiden Geraden $A\mu$, $A\nu$ die Lösung der Aufgabe. Dieselben sind conjugirt in Bezug auf K (weil $\mu\nu$ durch B geführt wurde), schneiden daher die Polare von A in zwei conjugirten Punkten; dass letztere auch von A aus rechtwinklig erscheinen, wird durch die Eigenschaft des Kreises erreicht.

Anm. 2. Obige Stellung der Aufgabe sowie deren Lösung waren metrisch specialisirt, beide können leicht verallgemeinert werden. In anderer Specialisirung tritt uns ein analoges Problem entgegen, wenn verlangt wird (Fig. 11): „die beiden Punkte xy zu finden, welche ein Punktepaar $\gamma\delta$ harmonisch trennen und zugleich gleichweit entfernt sind von einem gewissen dritten, ausserhalb der Strecke $\beta\delta$ gelegenen Punkte C.“

Man erinnere sich, dass für den durch xy gelegten Kreis mit dem Mittelpunkte C die Punkte γ und δ harmonisch getrennt werden durch xy, wobei δ der Pol der in γ errichteten Senkrechten zum Durchmesser.

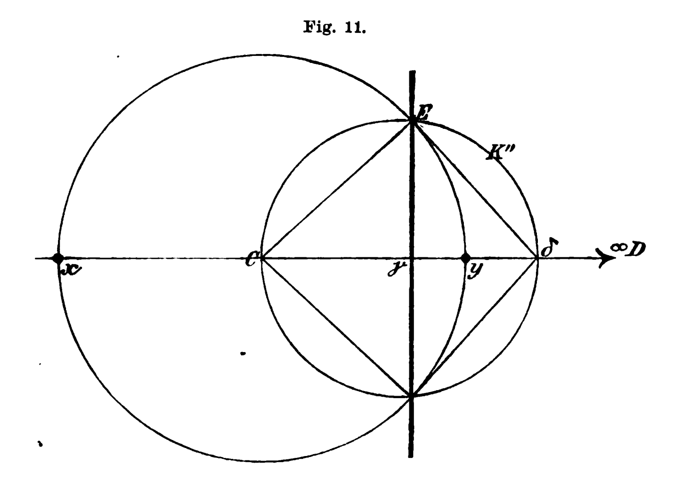
Umgekehrt kann nun aber auch der Kreis durch xy gefunden werden, wenn sein Mittelpunkt C vorgegeben, sowie

---

*) Verg. v. Staudt a. a. O.

das Punktepaar $\gamma\delta$. Der Winkel $CE\delta$ ist ein rechter, E liegt daher auf dem über $C\delta$ als Durchmesser construirten Kreise K''.

Fig. 11.



Ist demnach C, γ, δ vorgegeben, so construirt man diesen Hilfskreis über $C\delta$; eine Senkrechte in γ schneidet denselben in E, der Kreis durch E mit dem Mittelpunkte C liefert die Punkte xy.

Indem wir noch einen Augenblick bei Figur 9 verweilen, sei es gestattet vorgreifend den Leser aufmerksam zu machen auf eine in der Figur sich verbergende Schwierigkeit, deren Beseitigung uns später beschäftigen soll. Wir haben bereits erkannt, dass auch beim Imaginärwerden von $\alpha\beta$ doch die beiden Punkte MN reell erhalten bleiben. Es bleibt aber, wie sich später zeigt, bei diesem Imaginärwerden von $\alpha\beta$ von den Gegenseitenpaaren $\xi\eta$, resp. $\xi'\eta'$ des zur Construction verwendeten, in der Figur reell gezeichneten, Vierecks *eines* reell, also entweder das Gegenseitenpaar durch M oder das durch N; welches davon, kann nur für eine specielle Lage des Punktes A zum Kegelschnitt vorausgesagt werden. Und es ist bemerkenswerth, dass, während die Auffindung der Punkte MN noch mit recht einfachen Hilfsmitteln gelang, die Bestimmung jenes einen reell übrig bleibenden Gegenseitenpaares durch M oder N viel umständlicher wird. (§ 16 und 17.)

Die Analogie dieser zweiten, neuen Aufgabe mit der

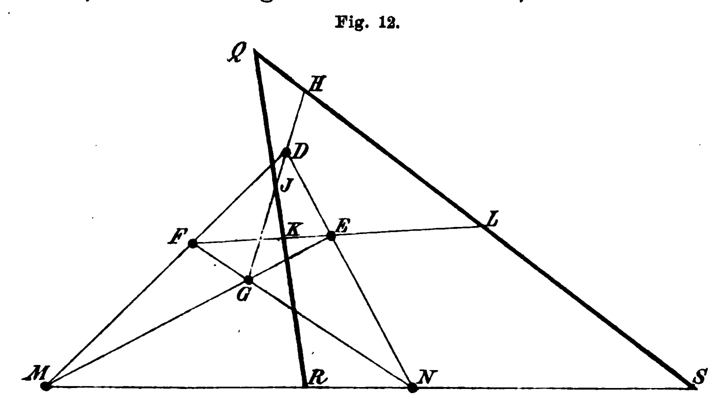
Bestimmung der *Brennpunkte* soll noch besprochen werden. Einstweilen sei bemerkt, dass die Construction der Punkte MN wesentlich dieselbe ist, welche die *Axen* eines Kegelschnitts liefert. Die Axen geben Richtungen, d. h. Punkte auf der unendlich fernen Geraden, der Polaren des Mittelpunktes, an, Punkte, welche sowohl zu einer gewissen durch den Mittelpunkt gelegten elliptischen Involution — der rechtwinkligen — gehören, als auch zur polaren Involution des Kegelschnitts für jene Gerade. Das ist gerade die Definition unserer M und N. Dass die Axen immer *reell* construirt werden können, ist anderweitig bekannt.

§ 7.

Lehrsatz.

„Es sei (Fig. 12) vorgegeben ein vollständiges Viereck $DEGF$ mit den Gegenseitenschnittpunkten MN, es sei ferner bekannt, dass zwei gewisse Gerade HL, JK harmonisch

Fig. 12.



getrennt werden, sowohl vom Gegeneckenpaar DG als auch von FE; dann werden diese beiden Geraden auch harmonisch getrennt durch das Punktepaar MN.“ Mit andern Worten: man construire auf der Diagonale FE zwei Punkte KL so, dass sie FE harmonisch trennen, ebenso auf der Diagonalen DG zwei Punkte JH, welche DG harmonisch trennen, dann treffen die beiden Geraden HL, JK die dritte Diagonale MN in zwei Punkten RS, welche MN harmonisch trennen.

(Specialisirung: die *Mitten* der drei Diagonalen eines voll-

ständigen Vierecks liegen auf einer Geraden; wie man erkennt, indem man sich die Gerade $QHLS$ ins Unendliche gerückt denkt.)

Ehe wir an den Beweis dieses letzten „Hilfssatzes“ gehen, nach Staudt, Geometrie der Lage Band I; § 16, 223, sei erwähnt, dass obiger Satz die Specialisirung eines interessanten Theorems aus der Polarentheorie der Kegelschnitte bildet, des „Hesse'schen Satzes“.

Ich citire denselben in der Fassung, welche ihm Staudt (a. a. O., § 18, 244) gibt, wie folgt:

„Sind in einem Vierecke, welches in der Ebene eines Polarsystems liegt, je zwei Gegenpunkte einander conjugirt, so sind es auch die beiden Punkte, in deren jedem ein Paar Gegenseiten sich schneiden.“ *)

Diesem Polarsysteme ist ein Kegelschnitt als Ordnungscurve zu Grunde gelegt zu denken. Artet nun dieser Kegelschnitt in zwei Gerade aus, HL und JK, so führt die Anwendung des „Hesse'schen Satzes“ gerade auf obiges Theorem: denn es sind dann die Eckpunkte DG sowohl, als auch FE, conjugirt in Bezug auf den von beiden Geraden dargestellten Kegelschnitt, demnach sind es auch die Gegenseitenschnittpunkte MN, d. h. letztere trennen die Geráden harmonisch.

Der Beweis ist einfach genug: die sechs Strahlen vom Schnittpunkte Q der Verbindungsgeraden HL und JK nach den sechs Ecken $DEFGMN$ des *vollständigen* Vierecks $DEFG$ bilden eine Involution. Diese Involution besitzt *ein* Paar Doppelelemente, d. h. es gibt nur *ein* Strahlenpaar, welches die Eigenschaft hat, gleichzeitig harmonisch getrennt zu werden von den drei Strahlenpaaren, welche von Q aus geführt werden nach FE, DG, MN.

Ist nun nach der Voraussetzung das Strahlenpaar von Q nach R und S *ein* Strahlenpaar, welches die beiden ersteren der drei ebengenannten Strahlenpaare harmonisch trennt, so ist es eben *das* Doppelelementenpaar der ganzen Involution der sechs Strahlen und trennt demnach auch das Strahlenpaar von Q nach M und N harmonisch.

*) Wegen eines einfachen Beweises des Satzes vergl. § 16.

§ 8.

Lösung des Problems durch Constructionen in der Ebene.

Wir sind nun nach diesen Vorbereitungen im Stande, den im § 1 aufgestellten Entwurf zu einer Lösung unseres Problems mit Erfolg auszuführen.

Zunächst haben wir die vollständige Figur zu besprechen, wie sie der Annahme reeller Bestimmungsstücke entspricht.

Die Aufgabe: „die (vier) doppelt berührenden Kegelschnitte durch drei Punkte anzugeben“ kann, indem noch speciell die drei Punkte im Innern des zu berührenden Kegelschnitts angenommen werden, gelöst werden wie folgt. *)

Es sei vorgegeben (Fig. 13) ein Kegelschnitt sowie die drei Punkte ABC; man suche auf den beiden Seiten des Dreiecks ABC, welche durch A gehen, jene Punkte — HJ einerseits, KL andrerseits —, welche sowohl AB wie DG harmonisch trennen auf AB, und dann auf AC sowohl AC harmonisch trennen, als auch EF.

Diese vier Punkte H, J, K, L können durch vier Gerade verbunden werden (entweder durch HL und JK, oder auch durch HK und JL), deren jede eine Berührsehne für einen der gesuchten Kegelschnitte abgibt. Nach Steiner (Werke II, pag. 345) hätte die Aufgabe sechs Lösungen statt der soeben constatirten *vier*; ein Abzählfehler, der in den Schlussnoten jenes Werkes verbessert wird. **)

In der Figur sind von den vier zu diesen vier Berührsehnen gehörigen Kegelschnitten (von welchen immer höchstens

---

*) Wegen der Lösung bei drei *reellen* Punkten, die eigentlich nichts weiter ist als die Construction eines Kreises auf der Kugel durch drei reelle Punkte, nach Uebersetzung des Metrischen ins Allgemeine, vergleiche man:

Steiner, Vorlesungen über synth. Geometrie, Band II (Schröter), 2. Auflage, pag. 345.

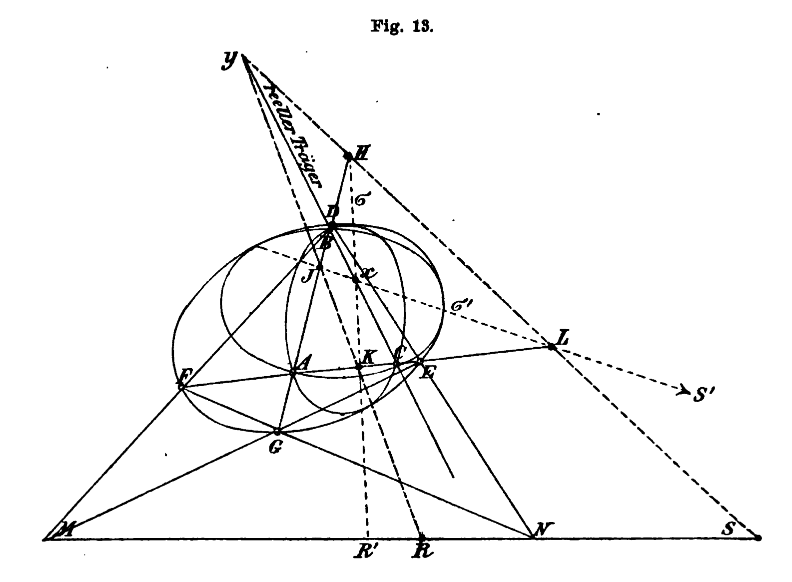
Steiner's Werke, herausgeg. von Weierstrass, Band II; pag. 481.

Milinowski, Elementar-synthet. Geometrie d. Kegelschn. § 27, 427, a, b.

**) Dass die Lösung der Aufgabe eine vierdeutige ist, kann mit aller Strenge daraus geschlossen werden, dass durch drei Punkte auf der Kugel vier Kugelkreise möglich sind, wenn die Gegenpunkte der gegebenen drei Punkte als gleichberechtigt angesehen werden. (§ 10.)

einer in imaginären Punkten berührt, vergl. die nachfolgende Lösung durch darstellende Geometrie), zwei wirklich gezeichnet,

Fig. 13.



nämlich jene, welche zu Berührsehnen haben JL, resp. HK. — Sowohl HK und JL müssen sich auf der Dreiecksseite BC schneiden, als auch HL und JK. (Nach § 3, pag. 15, oder § 5, pag. 18, oder ganz einfach nach bekannten Sätzen über das vollständige Viereck.)

Werden nun die Punkte BC imaginär auf der reell bleibenden Dreiecksseite BC, so bleiben doch die beiden Punkte x und y auf BC immer reell.

Sie können sofort construirt werden, als sowohl der polaren Punktinvolution des Trägers BC in Bezug auf den vorgegebenen Kegelschnitt angehörig, als auch der vorgegebenen elliptischen Involution auf demselben Träger mit den Doppelelementen BC angehörig (§ 3, pag. 15).

Und die Durchführung der Lösung ergibt, wie später streng bewiesen werden soll, dass von den vier Geraden, die paarweise durch x oder y laufen (nämlich HK mit JL durch x, HL mit JK durch y), immer *gerade ein* solches Paar Berührsehnen sich reell ergibt, beim Imaginärwerden von B und C.

Dass dieselbe Figur auch eine Interpretation als Bild gewisser Constructionen im Raume zulässt, d. h. dass dieselbe Aufgabe auch mit darstellender Geometrie gelöst werden kann, sei hier noch nicht ausführlich besprochen, sondern nur erwähnt. Die drei reellen Punkte ABC können als Repräsentanten dienen von Raumpunkten, auf der Fläche eines Ellipsoids gelegen, und zwar steht es uns frei, uns diese Raumpunkte zu denken entweder als der oberen oder der unteren Hälfte der Fläche angehörig. Es wäre also der Punkt A Repräsentant von $A^{(o)}$, einem auf der oberen Hälfte gelegenen Punkte des Ellipsoids, *oder* eines auf der abgewendeten Hälfte gelegenen Punktes $A^{(u)}$. Hat man bestimmt, welche Combination von Raumpunkten gerade dargestellt werden soll durch ihre Bilder ABC, so löse man nach den Methoden der darstellenden Geometrie die Aufgabe: die Schnittcurve sichtbar zu machen, in welcher eine durch drei Raumpunkte gelegte Ebene ein Ellipsoid schneidet. Durch Abzählen erfährt man leicht, wie viele verschiedene Lösungen des Problems auftreten: es sind nämlich $2^3 = 8$ Combinationen möglich, von denen je zwei identische Lösungen liefern. Man kann combiniren

$$A^o B^o C^o,\quad A^o B^o C^u,\quad A^o B^u C^o,\quad A^u B^o C^o,$$

was resp. identisch mit

$$A^u B^u C^u,\quad A^u B^u C^o,\quad A^u B^o C^u,\quad A^o B^u C^u.$$

Die Combination $A^o B^o C^o$ verlangt beispielsweise eine Ebene, die durch die drei *oberhalb* gelegenen Raumpunkte geführt wird; diese Ebene kann möglicherweise den Kegelschnitt der Zeichnungsebene imaginär treffen — mit der dazugehörigen Ebene $A^u B^u C^u$ —; sämmtliche übrigen Combinationen liefern Schnittcurven, die Punkte der *beiden* Hälften verbinden, demnach die Umfangscurve zweimal überschreiten müssen. Daher: „unter den vier reellen Kegelschnitten der Figur, bei reellen ABC innerhalb des vorgegebenen Kegelschnitts, kann höchstens *einer* in *imaginären* Punkten berühren.“

Wir machen nunmehr von vorausgegangenen Hilfssätzen die Anwendung auf die Figur 13: die beiden Berührsehnen

durch x — oder die durch y — treffen (§ 7) die Gerade MN, die Polare von A in zwei Punkten $R'S'$, — RS —, die die Strecke MN harmonisch trennen, oder auch: die Verbindungslinien von y nach M und N bilden mit den zwei Berührsehnen durch y ein harmonisches Büschel. Ein Beweis ist gar nicht mehr nöthig: wir finden ohne Weiteres alle Vorbedingungen der Figur 12 erfüllt, nach den Voraussetzungen der Construction der vier Punkte HJ, KL. Dasselbe gilt vom Punkte x.

Der Strahl von x nach dem reell verbleibenden Punkte A, sowie der reell bleibende Strahl BxC, trennen gleichzeitig die Berührsehnen durch x harmonisch, ebenfalls nach der Construction ($AJBH$ und $AKCL$ harmonisch). Die Berührsehnen selbst sind daher Doppelelemente zweier Involutionen, von welchen die eine die immer reellen Punkte MN zu Ordnungselementen besitzt, die andere die a priori reellen Strahlen xA, xC. Die Berührsehnen bestimmen sich mit anderen Worten als jene zwei Strahlen durch x, welche sowohl die Punkte M und N, als auch die Strahlen xA und BxC harmonisch trennen.

Wegen der Bestimmung der immer reellen Punkte MN (Gegenseitenschnittpunkte des imaginären Vierecks, welches gebildet wird von den vier Schnittpunkten der imaginären Geraden AB, AC mit dem vorgegebenen Kegelschnitte) ist § 6, Anm. 1 zu vergleichen.

Vorschriften zur Ausführung der Construction.

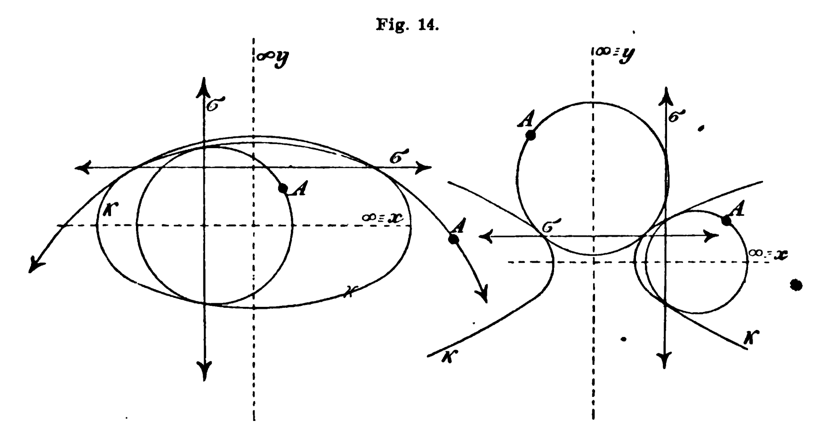
Nachdem die Punkte x und y auf der reellen Geraden BC bestimmt worden sind, nach ihrer Definition auf pag. 28, sowie die Punkte MN auf den Polaren von A (§ 6, Anm. 1), suche man jene beiden Geraden durch x, welche sowohl die beiden Strahlen xA, BxC, als auch die Strahlen xM, xN harmonisch trennen. Fallen diese Strahlen imaginär aus, so führe man die Construction für den andern Punkt y durch, wo sie dann sicher *reelle* Doppelelemente gibt (Anm. 1). Dieses Geradenpaar durch x oder y stellt Berührsehnen der gesuchten Kegelschnitte vor. Es sind dann von einem solchen Kegelschnitt

gefunden: zwei Punkte, auf der Berührsehne liegend, die Schnittpunkte der Berührsehne mit dem vorgegebenen Kegelschnitt, ferner der Pol dieser Berührsehne — derselbe ist identisch mit dem Pole der Berührsehne in Bezug auf auf den vorgegebenen Kegelschnitt —; und schliesslich der Punkt A. Die beiden Geraden vom Pole nach den zwei Punkten auf der Berührsehne sind Tangenten des unbekannten Kegelschnitts, — dies gibt gerade fünf Bestimmungsstücke für letzteren. Sind die Schnittpunkte einer Berührsehne mit dem vorgegebenen Kegelschnitt nicht reell, so ist doch schliesslich der unbekannte Kegelschnitt eindeutig und linear construirbar nach § 1.

Die Entscheidung darüber, welcher der beiden Punkte x oder y reelle Berührsehnen liefern wird, ergibt sich nicht schwierig, solange man mit der metrischen Specialisirung der Aufgabe arbeitet, wonach berührende *Kreise* durch einen festen Punkt verlangt werden. (Um die Ideen zu fixiren, sei diese Einkleidung der Aufgabe bei den zunächst folgenden Constructionsvorschriften festgehalten.)

Zur Orientirung über diese Frage diene die Figur 14, die kaum einer weitern Erklärung bedarf. Wir sehen zweimal

Fig. 14.



zwei Kreise, die doppelt berührend an eine Ellipse oder Hyperbel $\varkappa$ durch einen vorgegebenen Punkt A gelegt wurden, wobei letzterer einmal innerhalb, dann ausserhalb $\varkappa$ angenommen wurde. Die Berührsehnen σ gehen entweder parallel

der $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen}\\\text{imaginären}\end{matrix}\right\}$ Axe, oder (im Falle der Lage ausserhalb) parallel der $\left\{\begin{matrix}\text{grossen}\\\text{reellen}\end{matrix}\right\}$ Axe.

In der That sind ja die beiden Richtungen (unendlich fernen Punkte) der beiden Axen gerade unsere Punkte x und y, wenn BC ins Unendliche rückt und als Involution auf BC die rechtwinklige Involution der Kreispunkte vorgegeben wird; jene beiden unendlich fernen Punkte sind es ja, die sowohl der rechtwinkligen Involution der unendlich fernen Geraden angehören, als auch auf letzterer polar conjugirt sind in Bezug auf $\varkappa$. Welche der beiden Richtungen zur Construction zu benutzen ist, kann demnach leicht dem Gedächtnisse eingeprägt oder auch jederzeit durch rasches Entwerfen einer orientirenden Hilfsfigur entschieden werden.

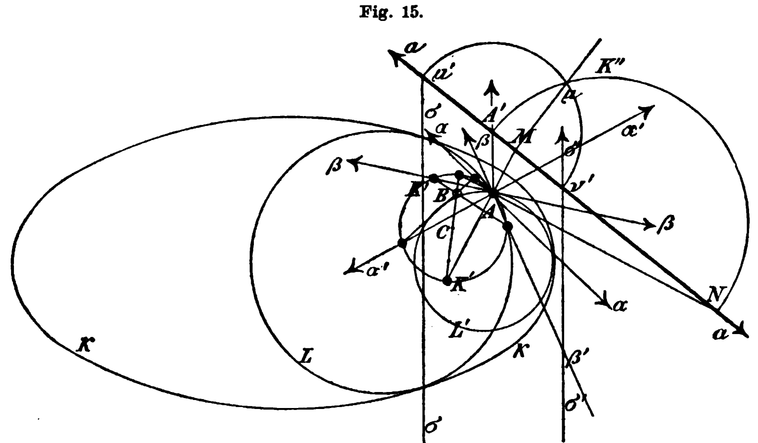
Die Figur 14 gestattet uns alle Lösungsvorschriften für beide Arten von Kegelschnitten, Ellipse, Hyperbel, zusammenfassen: Es sei gegeben A $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\\text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ $\varkappa$, man bestimme jene beiden Punkte MN auf der Polaren von A in Bezug auf $\varkappa$, welche conjugirt sind in Bezug auf $\varkappa$ und zugleich von A aus unter einem rechten Winkel erscheinen (§ 6, Anm. 1). Diese Punkte MN werden sich auf der Polaren von A so einstellen, dass sie durch den Punkt A *nicht* getrennt erscheinen, wenn man sie vom unendlich fernen Punkte der $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen — imaginären}\\\text{grossen — reellen}\end{matrix}\right\}$ Axe aus betrachtet. Man ziehe durch den Punkt A eine Parallele zur $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen — imaginären}\\\text{grossen — reellen}\end{matrix}\right\}$ Axe und suche dann die beiden Geraden $\sigma\sigma'$, welche parallel mit derselben Richtung harmonisch trennen die Punkte MN einerseits, dann jene Parallele durch A und die unendlich ferne Gerade andererseits (d. h. die Parallelen, welche, die Punkte MN harmonisch trennend, von A gleichweit entfernt sind) — nach § 6, Anm. 2.

Alle diese Vorschriften sind direct der Figur 13 zu entnehmen — mit Beibehaltung der Vorstellung, dass BC zur unendlich fernen Geraden geworden, demnach der Punkt x zu einer Richtung geworden und ein „Ziehen durch x“ zu einem „Parallellegen zu einer Richtung“.

Um den allerletzten Theil der Construction, die Bestimmung der Berührsehnen $\sigma\sigma'$, ausführlich zu geben, sei das in § 6, Anm. 2 Gegebene in kurzen Worten den nunmehr gegebenen Bestimmungstücken A, M, N angepasst (vergl. Fig. 15 und 16).

Man nenne A' den Schnittpunkt der durch A geführten Parallelen zur $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen — imaginären}\\ \text{grossen — reellen}\end{matrix}\right\}$ Axe mit der Polaren MN von A; M sei dabei derjenige der beiden Punkte MN, welcher

Fig. 15.



L und L' werden als doppelt-berührende Kreis durch A bestimmt. Letzterer berührt längs der idealen Sehne σ'.

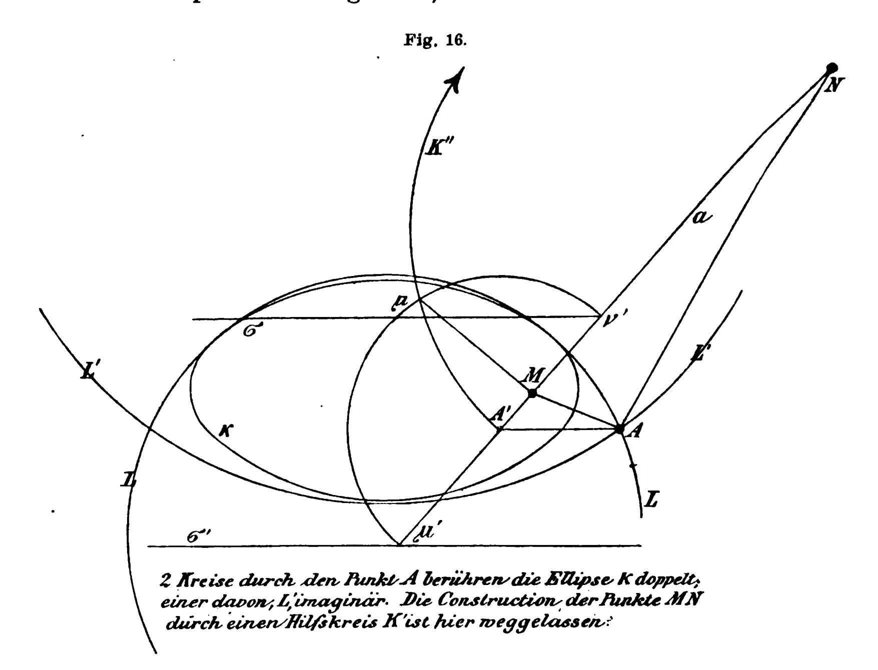
A' zunächst liegt, so dass also M die Strecke $A'N$ trennt. Durch $A'N$ als Durchmesser lege man einen Kreis und schneide denselben durch eine in M errichtete Senkrechte zu MN. Dieselbe schneidet den Kreis in zwei Punkten $\mu\nu$, wovon in der Figur nur einer gezeichnet ist; ein Kreis mit dem Mittelpunkte A' durch $\mu\nu$ schneidet die Gerade MN in zwei Punkten $\mu'\nu'$, welche von A' gleichweit abstehend M und N harmonisch trennen. Die durch diese zuletzt erhaltenen Punkte $\mu'\nu'$ gelegten Parallelen $\sigma\sigma'$ zur $\left\{\begin{matrix}\text{kleinen — imaginären}\\ \text{grossen — reellen}\end{matrix}\right\}$ Axe sind die gesuchten Berührsehnen.

In den Figuren 15 und 16 sind Beispiele wirklich durchgeführter Lösungen gegeben.

Anm. 1. Ueber die Zahl der reellen Lösungen, sowie den Fall eines imaginären $\varkappa$ ist zu bemerken:

Es wurde oben bei Besprechung der Orientirungsfigur Nr. 14 als plausibel hingestellt, dass das Problem immer zwei

Fig. 16.



2 Kreise durch den Punkt A berühren die Ellipse K doppelt; einer davon; L' imaginär. Die Construction der Punkte MN durch einen Hilfskreis K' ist hier weggelassen.

reelle Lösungen zeigte, indem entweder in der Richtung der kleinen — imaginären, oder grossen — reellen Axe sich zwei Berührungssehnen einstellen müssten. Wir wollen an Stelle dieser kurzen Bemerkung nunmehr den folgenden, vollkommen streng nachweisbaren, Satz treten lassen:

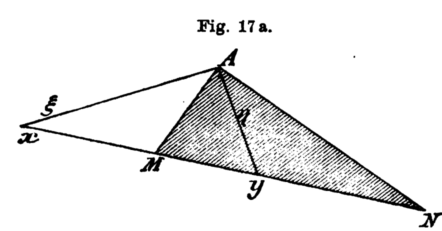
„Sei der vorgegebene Kegelschnitt $\varkappa$ reell oder imaginär, immer existiren durch einen beliebigen Punkt A zwei, nicht mehr und nicht weniger, reelle ihn doppelt berührende Kreise, indem zwei reelle Berührsehnen solcher Curven sich einfinden *müssen* von der Richtung entweder der einen oder andern Axe, aber immer nur von der einen Richtung.“

Für den Fall eines reellen $\varkappa$ hat übrigens bereits die Orientirungsfigur Nr. 14 fast Beweiskraft; es ist eben aus

Gründen der Symmètrie *nicht denkbar*, nicht zulässig, dass etwa die Berührsehne eines Kreises, der eine Hyperbel von aussen berührt, parallel zur imaginären Axe ausfiele; die Figur *kann* eben gar nicht anders gezeichnet werden, als mit einer Berührsehne in der andern Richtung. Für imaginäre Kegelschnitte fällt aber diese Unterstützung fort —; der mit wenigen Hilfsmitteln herstellbare *Beweis* obigen Satzes lautet nun wie folgt (Fig. 17a):

Es sei ein rechtwinkliges Dreieck MAN gegeben und durch den Scheitel A desselben ein beliebiger rechter Winkel, gebildet von zwei in A sich rechtwinklig treffenden Geraden $\xi\eta$, gelegt, welche die Hypotenuse in zwei Punkten x y treffen. Dann liegt von den beiden Punkten xy immer der eine innerhalb der Strecke MN, der andere ausserhalb. Dieser selbstverständliche Satz enthält den oben geforderten Beweis. Er lässt sich so aussprechen, dass *immer*, wenn der Punkt A successive in zwei zu einander senkrechten Richtungen projicirt wird auf die Hypotenuse MN, es bei diesen beiden Operationen einmal und nur einmal eintreten wird, dass seine Projection A' die Strecke MN *nicht* trennt. Zieht man daher durch A Parallele zu den beiden Axen eines Kegelschnitts, so trifft eine davon die Gerade MN innerhalb MN, die andre nicht; parallel zu letzterer Richtung sind Berührsehnen möglich.

Fig. 17a.



Sind die Punkte MN gelegen wie in Fig. 17b, so laufen die Berührsehnen parallel zur x-Richtung, in Fig. 17c dagegen parallel zur y-Richtung.

Für den Fall eines imaginären $\varkappa$ stellen sich (Fig. 18) die Punkte M und N auf der Polaren a von A genau so ein, wie früher (ungewöhnlich erscheint nur, wenn C den Mittelpunkt des Kegelschnitts bedeutet, dass die Polare des Punktes A jenseits des Mittelpunktes fällt); es ist wiederum zu ersehen, wie in Fig. 18a die Berührsehnen parallel zur x-Richtung ausfallen, in Fig. 18b zur y-Richtung.

Also nochmals: „auch für den Fall eines imaginär vorgegebenen $\varkappa$ giebt es zwei, gerade zwei, reelle Lösungen des

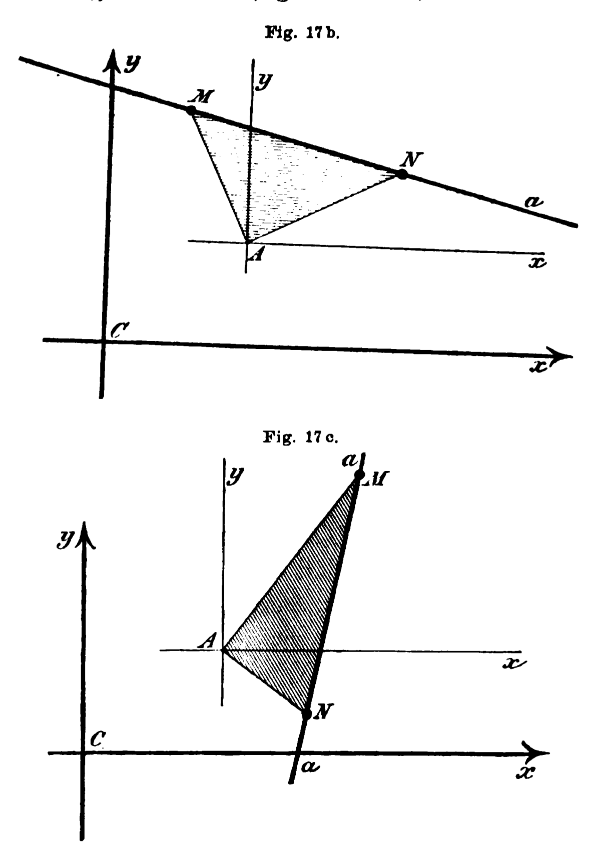


Fig. 17 b.

Fig. 17 c.

Problems.“ Diese Dinge sind *allgemein* giltig und nicht an die gewählte metrische Specialisirung gebunden.

Anm. 2. Von der in den ersten Worten der Einleitung gleichzeitig gestellten Aufgabe:

„Eine Parabel von vorgegebenem Brennpunkte zu bestimmen, welche einen vorgegebenen Kegelschnitt $\varkappa$ doppelt berührt,“

sei nur die Lösung ohne Beweis mitgetheilt, die bei consequenter dualistischer Uebertragung des oben Mitgetheilten sich ergibt (Fig. 19).

Es sei U der vorgegebene Brennpunkt der unbekannten Parabel; αM, αN die Axen des Kegelschnitts. Man construire

Fig. 18a.

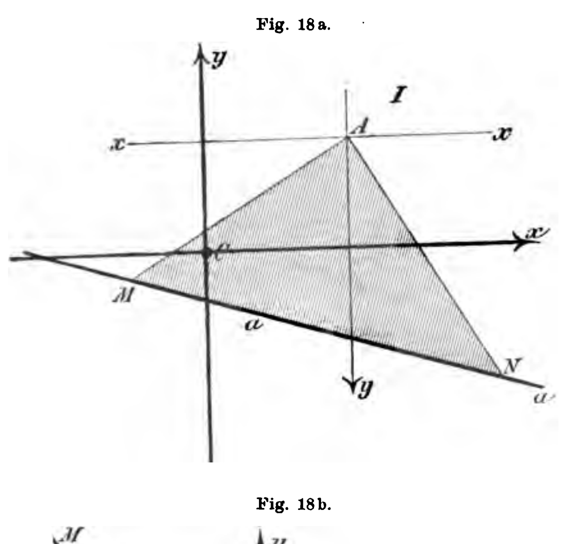
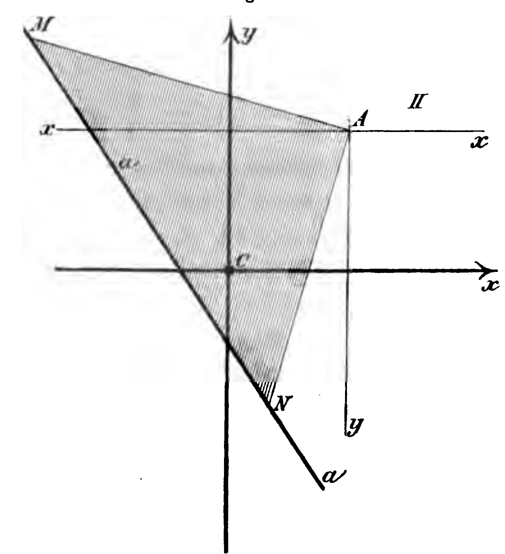


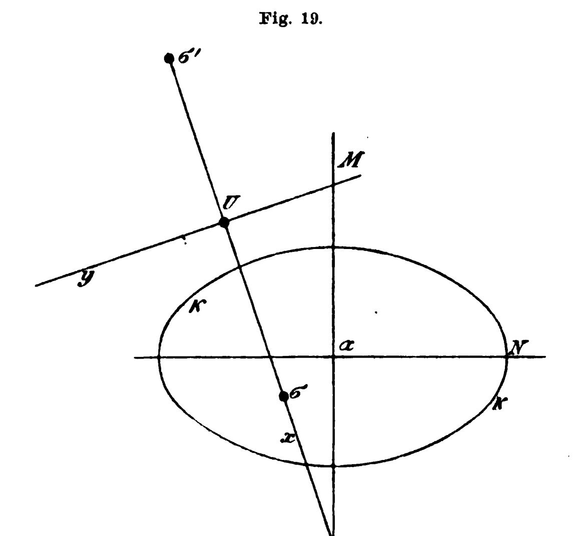
Fig. 18b.



durch U die zwei Geraden x, y, welche gleichzeitig der Involution U (in Bezug auf $\varkappa$) angehören und aufeinander senkrecht stehen; eine derselben, z. B. x, trifft dann αM und αN

in zwei Punkten so, dass U ausserhalb der Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten auf αM und αN fällt. Es gibt dann Punkte $\sigma\sigma'$ auf x, welche diese beiden Schnittpunkte harmonisch trennen und zugleich von U gleichweit entfernt

Fig. 19.



sind: die Polaren der so erhaltenen Punkte $\sigma\sigma'$ in Bezug auf den vorgegebenen Kegelschnitt $\varkappa$ sind die Berührsehnen der gesuchten Parabeln; zugleich sind σ, σ' die Pole dieser Berührsehnen; damit sind Bestimmungsstücke in genügender Anzahl bekannt.

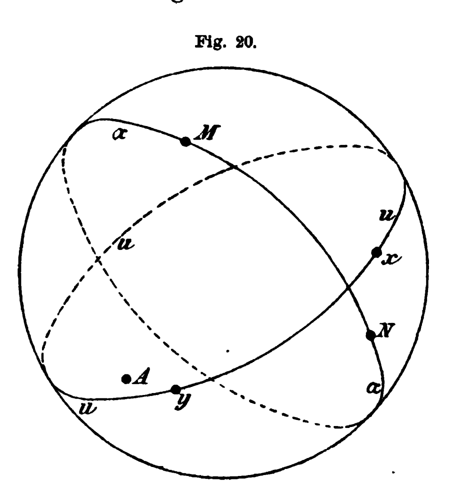
Anm. 3.*) Die Figur 20 gibt schematisch ein Bild der Lösung für den Fall, dass das Problem in der Eingangs erwähnten dritten Fassung gestellt gewesen wäre (pag. 2).

Wir sehen eine Ebene u eines grössten Kreises, welche die vorgegebene elliptische Involution enthalten möge, die dem aufzufindenden Kreiskegel als polare vorgeschrieben ist. Unter den Punkten dieser Involution gibt es zwei, x und y, die vom Mittelpunkte der Kugel aus unter rechtem Winkel erscheinen

*) Die strenge Begründung der in dieser Anmerkung benutzten Anschauungsweise findet sich erst im nachfolgenden Abschnitte.

und gleichzeitig ein Punktepaar jener Involution bilden. Ferner kann der auf der Kugelfläche fest vorgegebene Punkt A, durch welchen der Kreiskegel gleichzeitig gehen soll, mit der Involution auf u durch ein Ebenenbüschel verbunden werden und in letzterem die beiden Ebenen bestimmt werden, welche, ein Ebenenpaar der Involution durch A bildend, auf einander senkrecht stehen. Dieselben mögen die Polare von A in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis (d. h. die durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht zur Richtung nach A geführte Ebene α) in den Punkten M und N treffen. Hierauf legt man noch die verbindenden grössten Kreise durch x und A, sowie durch x und M, schliesslich x und N und sucht jene beiden Ebenen $\sigma\sigma'$, welche sowohl das Ebenenpaar xA, u einerseits, als auch das Ebenenpaar xM, xN andrerseits harmonisch trennen. Sie ergeben die Berührsehnen der unbekannten Kreiskegel. Das heisst: eine auf ihnen errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt der Kugel trifft die Kugelfläche im *Mittelpunkte* eines solchen Kreiskegels; der nun natürlich durch Mittelpunkt und den Punkt A vollständig bestimmt ist. Versagt die Construction für den Punkt x, so wird sie doch wenigstens für y gelingen; darüber beruhigt uns der Satz der Anmerkung 1. Eine Vorausbestimmung zu treffen, eine „orientirende Figur“ zu entwerfen, ist hier nicht möglich.

Fig. 20.



(In Fig. 20 hat man sich — um Uebereinstimmung mit pag. 2 zu erhalten — den Mittelpunkt der Kugel mit P bezeichnet zu denken, ebenso mit g die von P nach dem auf der Kugelfläche gelegenen Punkte A hinführende Verbindungsgerade.)

Zweiter Abschnitt.

§ 9.

Wir gedenken dieser Lösung in der Ebene mehrere andere, mit Hilfe von Raumbetrachtungen durchzuführende, folgen zu lassen. Es mag gerade hier der passendste Platz sein, einige Sätze einzuschalten, die als wichtiges Hilfsmittel für selbstständiges Vordringen in die Geometrie des Raumes zu dienen vermögen; ich meine die Sätze, welche den Zusammenhang zwischen der Theorie der Kugelkreise oder Kreiskegel mit jener der doppelt berührenden Kegelschnitte begründen.

Diese Dinge streifen eigentlich nahe an die höchsten und schwierigsten Gebiete der Raumgeometrie; der „imaginäre Kegelschnitt der unendlich fernen Ebene“, von dem wir gleich zu sprechen haben werden, gibt ja eigentlich allein das Mittel, mit dem man *messen* kann; und wir müssen wohl an ihn glauben, wenn wir erfahren, dass ohne ihn, d. h. ohne die Spuren seiner geheimnissvollen Wirksamkeit bei jeder congruenten Verschiebung von starren Gebilden im Raume, der menschlichen Seele auch der Begriff der Geometrie des Maasses nicht erwachsen wäre.

Aber in diese transcendenten Dinge wollen die nächsten Paragraphen nicht einführen; im Gegentheile soll nur gezeigt werden, wie sich der oben in Aussicht gestellte Zusammenhang zwischen Metrik und Geometrie der Lage einfach und anschaulich herstellen lässt, soweit wir ihn für spätere Untersuchungen nöthig haben werden.

Vorausgesetzt sei nur beim Leser die Vertrautheit mit der Anschauung, dass ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt

werden kann (auch wenn er selbst nicht sichtbar wird) durch sein auf einer Ebene vorgegebenes Polarsystem.

Betrachten wir nun das Strahlenbündel von Ebenen und Geraden, wie sie durch den Mittelpunkt einer Kugel möglich sind; speciell das darin enthaltene Polarsystem, in welchem immer eine Ebene einerseits der auf ihr senkrecht stehenden Geraden andrerseits zugeordnet wird, und umgekehrt.

Wir haben hier ein Polarsystem, wie es genau den Definitionen eines solchen entspricht; vergl. Staudt a. a. O. § 18, 234: „Wenn zwei reciproke Systeme in einerlei Ebene liegen*) und den Eckpunkten irgend eines Dreiecks ABC die ihnen gegenüberliegenden Seiten entsprechen, so liegen die Systeme involutorisch.“

Hat man aber die Existenz eines Polarsystems erkannt, so muss man nach dem zugehörigen *Kegelschnitte* (eigentlich hier nach dem „Ordnungskegel“) fragen. Derselbe fällt hier imaginär aus. Immerhin aber kann man mit seiner Hilfe die Thatsache, dass für alle möglichen Kugeln immer der Schnitt der für sie polar geordneten Strahlbündel im Mittelpunkte mit der unendlich fernen Ebene derselbe bleibt, so einkleiden, dass man sagt: „alle Kugeln gehen durch einen und denselben unendlich fernen Kegelschnitt“; indem man also abkürzend den Kegelschnitt als Ordnungscurve seinem Polarsystem substituirt.

Und da alle ebenen Schnitte einer Kugel Kreise sind, so muss man auch wohl jenen unendlich fernen Schnitt einen Kreis nennen. Daher die Berechtigung der Sprechweise: „alle Kugeln gehen durch denselben unendlich fernen Kreis“.

Die nunmehr aufzustellende Figur 21 ist eine Anknüpfung an früher gebrachte Dinge; es ist diesmal der Augpunkt A, von welchem aus früher ein Ellipsoid betrachtet wurde, wirklich gezeichnet worden.

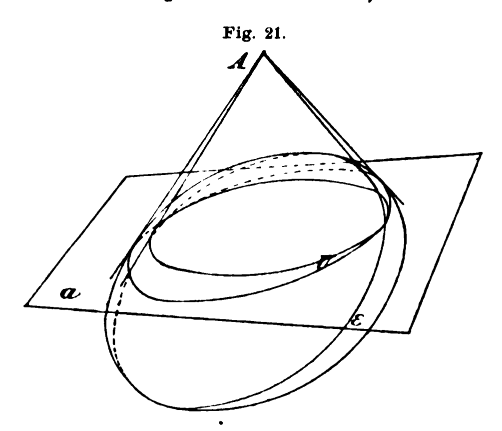
Wir wissen (§ 2), dass die Fläche von ihm aus betrachtet erscheint als eine Ellipse U und dass der Strahlenkegel,

---

*) In unserem Fall liegen zwei *Strahlenbündel concentrisch,* was genau auf dasselbe hinauskommt.

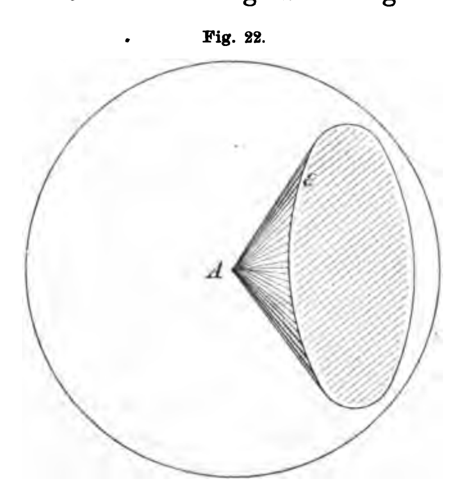
welcher dem Auge das Bild eines beliebigen ebenen Schnittes ε auf dem Ellipsoid übermittelt, diese Curve U zweimal berührt.

Fig. 21.



Damit sind wir eigentlich schon mit unserem Beweise des Satzes fertig: „alle Kreiskegel berühren den imaginären Kugelkreis doppelt.“ Wird nämlich die Fläche zweiter Ordnung zu einer Kugel, die Ebene der Curve U (die Polarebene des Augpunktes A) zur unendlich fernen Ebene, die nun von der Kugel im „unendlich fernen imaginären Kugelkreise“ geschnitten wird, A selbst zum Mittelpunkt der Kugel, so wird immer noch jeder ebene Schnitt der Fläche (jeder Kugelkreis) nach A projicirt durch einen Kegel, welcher jene Schnittcurve U der Kugel auf der unendlich fernen Ebene, den „imaginären Kugelkreis“ doppelt berührt (Fig. 22).

Fig. 22.



Die beiden Figuren 21 und 22 sind vom Standpunkte des Synthetikers aus *durchaus nicht verschieden.* Beide sind Bilder desselben Vorgangs im Raume. Beide enthalten eine Polarebene U nebst zugehörigem Pole A, sowie einen durch A geführten Kegel, der einen ebenen Schnitt ε der Fläche zweiter Ordnung projicirt. Ist nun für die erste

Figur *bewiesen* (§ 2), dass für sie dieser Kegel die Curve U doppelt berührt, so ist dasselbe auch für die zweite Figur bewiesen.

Von diesem wichtigen Satze: „alle Kreiskegel schneiden die unendlich ferne Ebene in Kegelschnitten, welche den imaginären Kugelkreis jener Ebene doppelt berühren", sei noch eine Ableitung gegeben, welche uns gleichzeitig die Berührsehne einer solchen Schnittcurve auf der unendlich fernen Ebene mit dem Kugelkreis kennen lehrt.

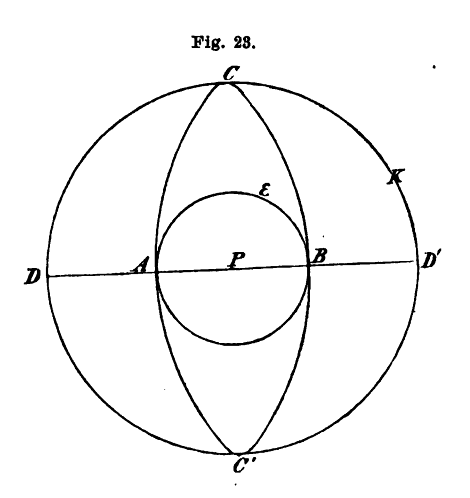


Fig. 23.

Es bezeichne (Fig. 23) K eine Kugel; die Stelle P der Figur bedeute nicht nur den Mittelpunkt, sondern sei das Bild eines auf der vordern Kugelhälfte gelegenen Punktes, so dass also das Auge, der Punkt P der Kugelfläche, sowie der Mittelpunkt derselben in einer Geraden liegen. Um diese Gerade als Mittellinie sei ein Kegel ε mit dem Scheitel im Mittelpunkt der Kugel construirt (oder: um P als Mittelpunkt sei auf der Kugelfläche ein Kreis construirt und derselbe nach dem Mittelpunkte hin durch einen Kegel ε projicirt worden). Wir können nun fragen nach der Polarebene des Punktes P (genauer der Geraden vom Kegelscheitel nach dem Punkte P) in Bezug auf diesen Kegel ε.

Dazu haben wir durch P beliebige grösste Kreise zu führen, wie etwa DPD', dieselben zum Schnitte zu bringen mit dem Kegel, und nach den Punkten zu fragen, in welchen sich die in jenen Schnittpunkten berührenden grössten Kreise treffen.

In der Figur wurden die beiden grössten Kreise durch A und B zum Schnitt gebracht in CC', welch letzterer also

einen Punkt der gesuchten Polare vorstellt. Dass nun der Punkt CC' auf jener Ebene gelegen ist, die senkrecht steht zur Geraden vom Mittelpunkte nach P, dass ferner die Punkte C und D einen Winkelabstand von 90^0 ergeben, ist eigentlich *aus Gründen der Symmetrie* selbstverständlich. Man kann sich diese Verhältnisse aber noch deutlicher machen, indem man umgekehrt verfahrend jenen Punkt CC' der Kugel construirt, der durch die im Mittelpunkt errichtete Senkrechte zur Ebene des grössten Kreises DPD' auf der Kugel ausgeschnitten wird — und von ihm aus grösste Kreise zieht nach den Punkten A und B, in welchen der Kreis DPD' den Kugelkreis ε traf. Diese beiden grössten Kreise stehen in A und B auf DPD' senkrecht, nach der über Punkt CC' gemachten Annahme; da nun auch der Kugelkreis unter rechtem Winkel an den Stellen A und B durch den Kreis DPD' durchgeht, so *berühren* die beiden grössten Kreise CA, CB den Kugelkreis ε —; *also* muss umgekehrt der Schnittpunkt der berührenden grössten Kreise durch A und B jener Punkt CC' sein, welcher sowohl von D als von P um 90^0 entfernt ist.

Bei diesen Constructionen hat sich also zunächst das Resultat ergeben, dass für den Kreiskegel ε (Kugelkreis ε) der Punkt C der Pol ist von der Geraden DPD'.

So kann man aber für jede Gerade durch P den Pol suchen, — immer findet sich derselbe auf jener Ebene, die alle Punkte der Kugel enthält, die von P um 90^0 entfernt sind —; und auf dieser Geraden selbst sind je zwei Punkte CD in Bezug auf ε conjugirt, wenn sie vom Mittelpunkt der Kugel aus unter rechtem Winkel erscheinen.

Damit ist gesagt, dass die *Polare* des Punktes P in Bezug auf den Kugelkreis ε (den Kreiskegel ε) zusammenfällt mit der für die Richtung vom Mittelpunkte nach P in Bezug auf die *Kugel* bestimmten Polaren. Zugleich aber ist die Involution dieser Polaren, wie sie als polare Involution in Bezug auf ε anzuordnen ist, identisch mit der polaren Involution derselben Ebene durch den Mittelpunkt in Bezug auf die Kugel. Bringen wir sowohl Kegel ε als Kugel K zum Schnitte mit der unendlich fernen Ebene (d. h. schneiden wir diese

Ebene mit den beiden im Mittelpunkte der Kugel concentrisch liegenden Strahlenbündeln, von welchen das eine in Bezug auf die Kugel polar geordnet ist, das andere in Bezug auf den Kegel ε), so zeigen die beiden so erhaltenen Schnittcurven die besondere Lage zu einander, dass für beide Curven nicht nur ein gewisser Punkt P dieselbe Gerade π als Polare aufweist, sondern auch *die polare Involution auf dieser Geraden dieselbe ist in Bezug auf beide Curven.* Da diese Gerade von den Kegelschnitten getroffen wird in Punkten, die durch die auf ihr gegebene Involution als deren Ordnungspunkte bestimmt sind, so schneiden beide Kegelschnitte diese gemeinschaftliche Polare π in denselben Punkten. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P liefern bekanntlich *Tangenten* an die Kegelschnitte, *wenn* eben π als Polare von P bekannt ist, — diese Tangenten sind also für beide Kegelschnitte dieselben und auf ihnen berühren sich die beiden Kegelschnitte.*)

§ 10.

Nachdem obige Principien nach ihrer Tragweite erkannt sind, ist es ganz Sache des Geschmacks, hängt es ganz von der grössern Uebung in einem der beiden verschiedenen Gebiete ab, ob man die Sätze der Theorie der Doppelberührung zweier Kegelschnitte ableiten will aus der Theorie der Kugelkreise oder umgekehrt.

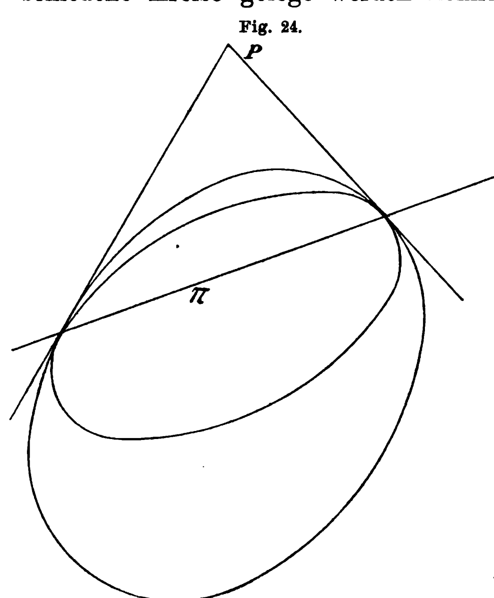
Je nachdem ein Satz sich übersichtlicher gestaltet in Aussprache und Beweis gerade in dem einen jener Gebiete, wird man in diesem verbleiben um ihn aufzustellen und von da aus ins andere Gebiet zu übertragen.

---

*) Diese Verhältnisse und Schlüsse werden nicht deutlich, solange man sich nur an die Raumfigur mit der imaginären Schnittcurve der Kugel auf der unendlich fernen Ebene hält; es ist immer heikel von Dingen zu sprechen, die man gar nicht sieht. Doch kann man sich wenigstens den allerletzten Theil des oben Gegebenen recht anschaulich machen, indem man sich zwei reelle Kegelschnitte vorzustellen versucht, für welche gleichzeitig eine Gerade π die Polare eines Punktes P sein soll, während beide Kegelschnitte die Gerade π in denselben Punkten treffen sollen. Nie wird man die entsprechende Figur anders zu entwerfen vermögen, als wie es in Figur 24 geschah; immer wird die doppelte Berührung der beiden Kegelschnitte evident.

Dass durch drei Punkte an einen Kegelschnitt vier doppelt berührende Kegelschnitte möglich sind, lehrt uns beispielsweise nunmehr der bekannte Satz, dass durch drei Punkte auf einer Kugel, mit ihren gleichberechtigten Gegenpunkten vier verschiedene Kreise gelegt werden können. Dass die Berührsehnen aller der Kegelschnitte, die durch zwei feste Punkte BC gehend einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, die Verbindungsgerade in einem von zwei festen Punkten xy schneiden, ist aus den einfachen Verhältnissen der Figur aller Kreiskegel durch zwei feste sich schneidende Gerade, aller Kugelkreise durch zwei feste Punkte, abzulesen: die Pole jener gemeinschaftlichen Berührsehnen sind nach § 9 die Mittelpunkte dieser Kugelkreise. Sie liegen, wenn B und C fest bleiben, auf festen grössten Kreisen der Kugel, welche senkrecht stehen auf dem durch B und C gehenden grössten Kreise.

Fig. 24.



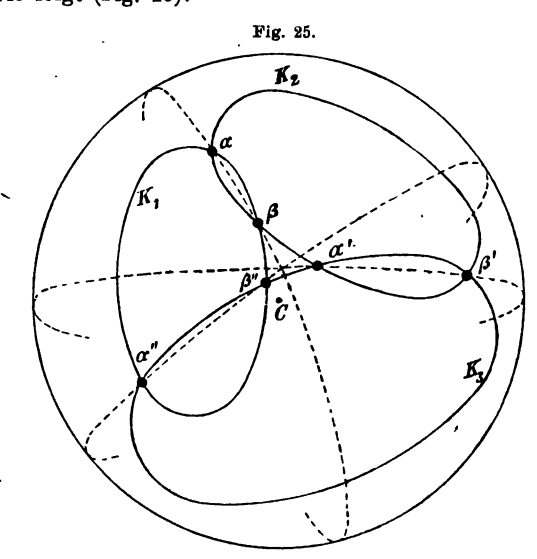
Die Punkte $x\,y$, in welchen diese beiden Oerter der Mittelpunkte senkrecht stehen auf der Verbindungslinie BC, sind ferner bekanntlich die Punkte, welche den Winkelabstand von B bis C halbiren: d. h. sie erscheinen vom Mittelpunkte der Kugel aus unter rechtem Winkel und trennen zugleich die Strahlen nach B und C harmonisch. Durch diese Punkte xy gehen aber eben auch alle die Berührsehnen der durch die zwei festen Punkte BC möglichen Kreiskegel, aus Gründen der Stereometrie. Dies ist in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen des § 3.

Die in einem System von drei doppeltberührenden Kegelschnitten möglichen Secanten lassen sich zu Gruppen von je drei zusammenordnen, die immer durch einen Punkt gehen (§ 5). Damit wäre auch gesagt, dass die gemeinschaftlichen Secanten von drei Kreisen auf der Kugel (d. h. die grössten Kreise, die durch je ein Schnittpunktepaar von zweien dieser drei Kreise gelegt werden) sich — bei bestimmter Auswahl dieser drei Secanten — in einem Punkte schneiden.*)

*) Um den obigen Satz zu beweisen: „die gemeinschaftlichen Secanten von drei Kugelkreisen schneiden sich in einem Punkte", wurden Umwege gemacht. Wir haben zunächst den Satz vom gemeinschaftlichen Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Secanten im System von drei doppelt berührenden Kegelschnitten durch besondere Hilfsmittel (§ 5) gewonnen; wir haben hierauf (§ 9) einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Kugelkreise und jener der doppeltberührenden Kegelschnitte gewonnen; indem wir zwei verschiedene Ideen vereinigten, erhielten wir schliesslich einen Beweis jenes Satzes.

Sollte dieser Satz für sich allein, ohne Zusammenhang mit unsern gegenwärtig uns beschäftigenden Untersuchungen, bewiesen werden, so wäre ein so weitausholender Beweis nicht mehr elegant zu nennen. In der That lässt sich durch Zusammenziehen der beiden im Texte benutzten Methoden zu einem einzigen Schlusse der Beweis bedeutend abkürzen, wie folgt (Fig. 25):

Fig. 25.

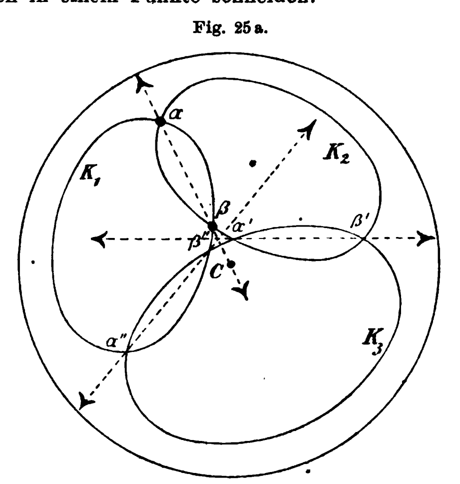


§ 11.

Wir werden in diesem Paragraphen den Beweis eines weiteren Satzes aus der Theorie der Kugelkreise durch ähn-

Es seien K_1 K_2 K_3 drei Kreise auf einer Kugel mit dem Mittelpunkte C; zu zeigen wäre also, dass wenn man die grössten Kreise legt durch die zwei Schnittpunkte je eines der drei Kreispaare: K_1 K_2, K_1 K_3, K_2 K_3 ($\alpha\,\beta$ in der Figur ist ein solches Schnittpunktepaar), dieselben sich schliesslich in einem Punkte schneiden.

Fig. 25a.



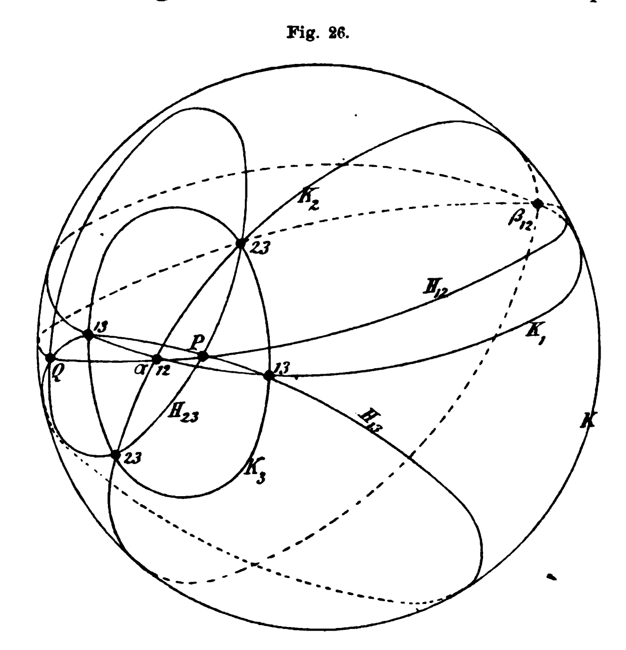
„Betrachten" wir diesmal vom Mittelpunkte C aus, so bemerken wir, dass eine Ebene durch diesen Mittelpunkt sowie die beiden Kugelpunkte $\alpha\,\beta$ zusammenfällt mit jener Ebene, welche von C aus verbunden wird mit der räumlichen Schnittgeraden der beiden *Ebenen* K_1 und K_2; denn dieser Schnittlinie gehören sicher die beiden Raumpunkte α und β auf der Kugelfläche an. Daher wird man sofort allgemein sagen können: „Jener grösste Kreis auf einer Kugel, welcher durch zwei Schnittpunkte zweier Kreise gelegt ist, wird auch erhalten, wenn man die Kugel schneidet mit jener Ebene, welche durch den Mittelpunkt gehend die räumliche Schnittgerade jener beiden Ebenen projicirt, welche durch die Kugelkreise bestimmt sind. Liegen nun drei solche Ebenen vor, K_1 K_2 K_3, so schneiden sie sich im Raume in einem einzigen Punkte, durch welche auch ihre drei Schnittgeraden gehen (Fig. 25a); daher gehen auch die zugehörigen drei grössten Kreise durch einen und denselben Punkt, denn als Bilder von drei durch einen Punkt gehenden Raumgeraden müssen sie auch das Bild jenes gemeinschaftlichen Raumpunktes gleichzeitig enthalten."

Dies war eben zu beweisen.

liche Schlüsse, wie die in der Note zum vorigen Paragraphen ableiten und denselben in die Geometrie der doppeltberührenden Kegelschnitte übersetzen, sowie als letztes Beispiel eine Uebertragung in umgekehrter Richtung, d. h. aus dem Gebiete der Doppelberührung in die Geometrie der Kugelkreise versuchen.

I. Es sei (Fig. 26) P ein beliebiger Punkt auf der Oberfläche einer Kugel K, $K_1 K_2 K_3$ drei beliebige Kreise auf derselben Kugel. Dann existirt ein Kugelkreis, der bestimmt ist durch die zwei gemeinschaftlichen Punkte von $K_1 K_2$ so-

Fig. 26.



wie den Punkt P, desgleichen ein solcher für das Kreispaar $K_1 K_3$ und schliesslich für $K_2 K_3$. „Diese drei Kreise schneiden sich ausser in P nochmals in einem Punkte Q, welcher kein andrer ist, als jener, in welcher die Kugelfläche getroffen wird von jenem Strahle, der von P aus den *Raumpunkt* projicirt, in welchem sich die drei *Ebenen* $K_1 K_2 K_3$ schneiden.“ (Beweis: Jener Kreis, welcher bestimmt ist durch die Schnittpunkte von $K_1 K_2$ sowie P, ist identisch mit jenem,

in welchem die Kugel getroffen wird von der *Ebene*, welche P verbindet mit der räumlichen Schnittgeraden der *Ebenen* der Kreise $K_1 K_2$, denn durch die drei Punkte P, α, β sind sowohl jener Kugelkreis $P \alpha \beta$ als die Ebene P $(K_1 K_2)$ eindeutig bestimmt. Die drei vorkommenden Schnittgeraden im Raume, die der drei Ebenenpaare $K_1 K_2, K_1 K_3, K_2 K_3$ schneiden sich in *einem* Raumpunkte, dessen Projection von P aus auf die Kugelfläche in allen drei vorkommenden Kugelkreisen durch P, den Projectionen der drei räumlichen Schnittgeraden auf die Kugel, enthalten sein muss. Dies ist eben der Satz.)

Wir schalten zunächst zwei Anwendungen dieses Satzes auf die ebene Elementargeometrie ein:

Wäre etwa zu beweisen, dass sich die drei gemeinschaftlichen Secanten von drei *ebenen* Kreisen in einem Punkte schneiden, so projicire man dieselben, durch stereographische Projection, von einem Punkte P auf einer Kugel aus auf die Fläche dieser Kugel (als P muss dabei der Nordpol der Kugel gewählt sein, wenn die Ebene der drei Kreise parallel zur Aequatorebene). Auf dieser Kugel entsteht dann genau dieselbe Figur 26, die uns soeben vorlag: sie zeigt drei durch P gehende Kugelkreise, die sich, eben nach unserm Satze, ausser in P noch in einem Punkte schneiden: wird dieser Punkt wieder auf die Ebene der drei Kreise herabprojicirt, so liefert er direct den Beweis für die Existenz des gemeinschaftlichen Schnittpunktes der drei gemeinschaftlichen Secanten.

Man kann ferner auch die Figur von drei in einer Ebene gezeichneten beliebigen Kreisen, sowie einem beliebig dazu genommenen Punkte P' derselben Ebene, von dem Nordpol einer Kugel aus auf letztere projiciren: wir erhalten dann nochmals dieselbe Figur (26) von drei Kugelkreisen nebst einem Punkte P der Kugeloberfläche. Legt man in der Ebene jene drei Kreise, welche bestimmt sind durch den Punkt P', sowie je zwei gemeinschaftliche Punktepaare eines Kreispaares, so projiciren sich diese drei ebenen Kreise auf die Kugel in der Raumfigur 26 von drei Kugelkreisen, von welchen jeder durch P und je zwei gemeinschaftliche Punkte eines Kugelkreis-Paares geht. Diese drei Kreise auf der Kugel schneiden

sich ausser in P in noch *einem* Punkte Q; wird dann die Figur auf der Kugel wieder auf die Ebene herabprojicirt, so erhält man den Satz: „Die drei Kreise (auf einer Ebene), welche möglich sind durch einen beliebigen festen Punkt P', sowie die gemeinschaftlichen Punkte je eines Paares von drei beliebig vorgegebenen Kreisen, treffen sich ausser in P' in noch einem Punkte Q." (Vergl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, Art. 269, Aufgabe: „Wenn drei Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$, $S''=0$ gegeben sind, und zwei andre $S_1'=0$, $S_1''=0$ durch die respective dem ersten und zweiten und dem ersten und dritten von ihnen gemeinschaftlichen Punkte gelegt werden, so liegen die vier gemeinsamen Punkte dieser letztern und die des Paares $S'=0$, $S''=0$ auf einem und demselben Kegelschnitt."

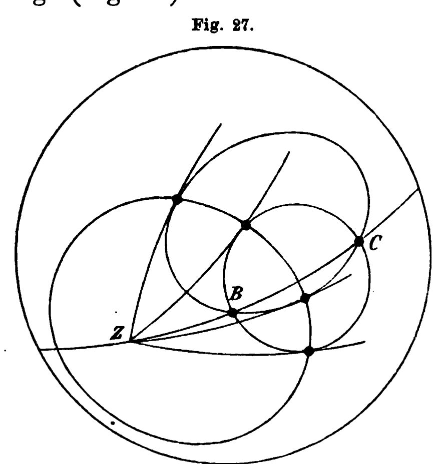
Dass dieser ganz allgemeine Satz identisch mit unserem soeben gewonnenen, wird mit Zuhilfenahme jener Vorstellung klar, nach welcher alle Kreise einer Ebene sich in denselben zwei festen Punkten treffen.) —

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu unserer „Uebertragung" zurück und gewinnen nunmehr den Satz über doppelt berührende Kegelschnitte (Fig. 6c, dieselbe ist *eben* zu denken, nicht mehr als Bild räumlicher Vorgänge aufzufassen): „Ist ein System von drei Kegelschnitten $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ vorgegeben, welche alle einen vierten U doppelt berühren, so lassen sich unter den $3 \cdot 4 = 12$ Schnittpunkten derselben Gruppen von je drei Paaren auswählen von folgender Eigenschaft: die drei doppelt berührenden Kegelschnitte an U, welche bestimmt sind durch einen beliebigen Punkt P der Ebene der Figur, sowie je ein solches Paar gemeinschaftlicher Punkte eines Kegelschnittpaares schneiden sich ausser in P nochmals in einem Punkte." In der Figur 6c sind drei solche doppeltberührende Kegelschnitte durch P punktirt angedeutet. Wie sich dieselben zum zweitenmale in einem Punkte treffen, ist deutlich der Figur zu entnehmen.

II. Alle die vorhergehenden Sätze wurden mit bemerkenswerther Leichtigkeit gewonnen. Sie verdanken ihre Aussprache einem Spielen der Phantasie mit den wenigen Hilfsmitteln, wie sie die einfachsten Schlüsse durch „Betrachtung" oder

nach den Ideen des § 9 bieten; es soll diesen Sätzen auch keine besondere Tiefe zugesprochen werden, sie wollen aufgefasst sein als eine *Anregung* zu weiterem Vordringen auf diesem klar übersichtlichen Wege. — Um ein letztes Beispiel zu geben, wollen wir die Betrachtungen des § 4 hier wieder aufnehmen. Zur Uebung wurde damals ein ziemlich complicirter Satz über doppelt berührende Kegelschnitte bewiesen: wir wollen nun diesen Satz in die Geometrie der Kugelkreise übertragen, wie folgt (Fig. 27):

Fig. 27.



„Gegeben auf einer Kugel drei Punkte ZBC eines grössten Kreises; werden durch BC alle möglichen Kugelkreise (eine der beiden Schaaren) gelegt und von Z aus grösste Kreise construirt, welche diese Kugelkreise berühren, so liegen die Berührpunkte aller dieser grössten Kreise auf einem Kugelkreise, der Z zum Mittelpunkte hat."

Dieser letzte Zusatz folgt aus der leicht zu erweisenden Bemerkung, dass in Fig. 4 z der Pol wird von jener Geraden, auf welcher sich der vorgegebene Kegelschnitt U berührt mit dem dort neu aufgestellten Kegelschnitte der Berührpunkte der Tangenten von z an die ε.

Wir hätten so einen Satz gewonnen, den man kaum mehr ganz direct aus der Figur 27 ablesen könnte.

Wird übrigens die Figur 27 so gedreht, dass Z in den Nordpol rückt, und dann die Punkte der Kugel auf die Ebene des Aequators projicirt, so folgt der Satz für die ebene Geometrie, dass wenn ZBC drei Punkte einer Geraden, die Berührpunkte sämmtlicher Tangenten an die durch BC möglichen Kreise von Z aus wiederum auf einem Kreise liegen, der Z zum Mittelpunkte hat.

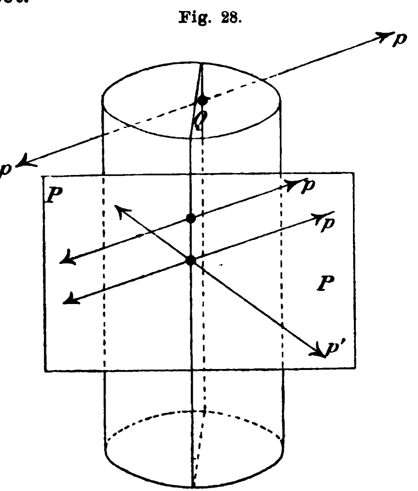
§ 12.

Zweite Lösung des Berührungsproblems; mit Hilfe von Raumbetrachtungen.

Ein Hauptzweck der vorhergehenden Paragraphen war: die Vorstellung für die besonderen Lagenverhältnisse vorzubereiten, die wir den „Kreiscylindern" zuschreiben müssen in Bezug auf die unendlich ferne Ebene und den unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Unsere nunmehr folgende Lösung unseres eingangs aufgestellten Problemes stützt sich auf einen Satz über solche „Kreis"-Cylinder; sein Nachweis wird nunmehr nach dem Vorausgeschickten in Kürze erledigt werden können.

Um zunächst von jenen „Kreiscylindern" zu sprechen, so können wir über ihr Verhalten zum imaginären Kugelkreis schliessen durch Discussion des Polar-Systems (und dessen Schnitt mit der unendlich fernen Ebene), wie es sich bei einem Kreiscylinder gestaltet.

Fig. 28.



Ist *ein Punkt* der unendlich fernen Ebene, d. h. die Richtung einer Geraden vorgegeben, p, so liegen die Berührpunkte der in dieser Richtung gezogenen Tangenten an den Cylinder auf einer festen Ebene Q (Fig. 28). Dies entspräche noch den bekannten Eigenschaften des polaren Systems im Raume für jede Fläche zweiter Ordnung.

Aber es ist nun weiter erstens bemerkenswerth, dass alle diese Ebenen Q durch einen und denselben festen Punkt der unendlich fernen Ebene gehen (alle eine Richtung gleichzeitig enthalten, die der Mittellinie des Cylinders); und dass zweitens eine solche Ebene Q

nicht allein zugehört zu der *einzigen* Richtung p, sondern dass es im Gegentheile unendlich viele Richtungen p' gibt (die alle wieder in der Stellung *einer* Ebene, P, vorkommen), welche alle durch Construction von Tangenten in dieser Richtung p' genau auf dieselbe Ebene Q führen würden.

Mit andern Worten: Das Polarsystem eines Kreiscylinders auf der unendlich fernen Ebene zeigt das besondere Verhalten, dass zu einer Geraden (Q) die unendlich vielen Punkte p, p' einer andern Geraden P als Pole gerechnet werden können, sowie dass überhaupt alle Polaren von beliebigen Punkten p immer durch einen festen Punkt gehen. Wir können uns von einem Kegelschnitt, der ein solches Polarsystem besitzt, keine andere Vorstellung machen, als dass er zerfällt in ein Linienpaar, und dass ein Punkt und eine Gerade dann in Bezug auf ihn Pol und Polare genannt werden, wenn sie dieses Linienpaar harmonisch trennen.

Welche Beziehung hat nun das (übrigens imaginäre) Linienpaar, in welchem jeder Kreiscylinder die unendlich ferne Ebene trifft, zum Kugelkreis dieser Ebene?

Um das zu erkennen, fassen wir die Involution von Ebenenpaaren PQ ins Auge, welche sämmtlich die Richtung der Mittellinie enthalten und in Bezug auf den Kreiscylinder conjugirt sind. Dieselben stehen paarweise senkrecht auf einander: d. h. ihre Involution auf der unendlich fernen Ebene — durch den Schnittpunkt C jener Mittellinie mit dieser Ebene — ist genau dieselbe, die man erhalten hätte, würde man diese Mittellinie durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt und dann durch sie alle möglichen in Bezug auf die Kugel conjugirten Ebenenpaare construirt haben.

Es haben daher zwei Ebenen PQ, welche der Involution in Bezug auf den Cylinder angehören (welche also das Linienpaar harmonisch trennen, in welchen derselbe die unendlich ferne Ebene schneidet), die Eigenschaft, zugleich immer conjugirt zu sein in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis.

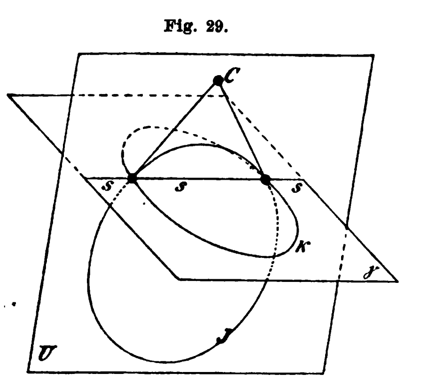
Weiss man aber, dass alle Linienpaare einer Involution polar conjugirt sind in Bezug auf einen Kegelschnitt, so sind die Tangenten an diesen Kegelschnitt vom Involutionscentrum

aus identisch mit den Doppelstrahlen jener Involution. Daher: „Das Linienpaar, in welches der Schnitt eines Kreiscylinders mit der unendlich fernen Ebene zerfällt, bildet Tangenten an den imaginären Kugelkreis.“

Man kann diese Beziehung auch noch auf einem ganz verschiedenen Wege ableiten, indem man nicht mehr von den *Eigenschaften* des Kreiscylinders ausgeht, sondern von dessen *Construction*.

Um einen Kreiscylinder zu construiren, wird man einen Kreis $\varkappa$ auf einer Ebene γ zeichnen, hierauf durch die Punkte seiner Peripherie Gerade führen in jener Richtung C, welche senkrecht ist zur Stellung der Ebene γ des Kreises. Das so erhaltene geometrische Gebilde führt auf folgende Verdeutlichung seines Entstehens, wenn man die eben gegebenen Constructionsvorschriften aus der metrischen Specialisirung in die allgemeine Figur zu übertragen versucht — wobei wir in der Hilfsfigur (Fig. 29) wie immer den imaginären Kugelkreis durch einen reellen Kegelschnitt J andeuten.

Fig. 29.



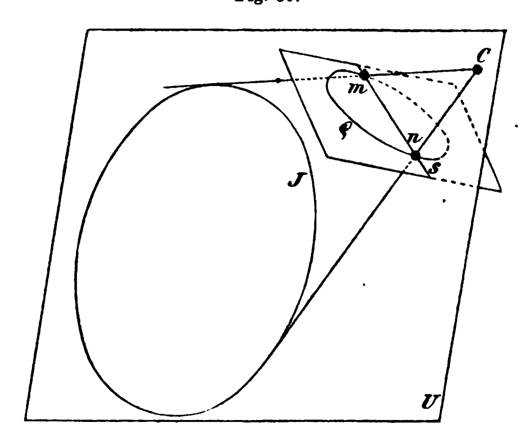
In dieser Figuur sei γ die Ebene des Kreises $\varkappa$, U die unendlich ferne Ebene, J der auf dieser Ebene gelegene imaginäre Kugelkreis. Zunächst ist noch zu besprechen, in welcher Lage sich denn eigentlich ein *ebener Kreis* zum imaginären Kugelkreise befindet. Man weiss von einem ebenen Kreise $\varkappa$, dass sich durch ihn immer eine Kugel legen lässt, welche also die Ebene U im Kegelschnitte J trifft. Das heisst: die beiden Kegelschnitte $\varkappa$ und J gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an, müssen sich also schneiden; daher: „jeder Kreis geht auf der unendlich fernen Geraden s seiner Ebene durch jene zwei Punkte, in welchen diese Ebene den unendlich fernen imaginären Kugelkreis schneidet.“

Nunmehr wird man sich fragen nach der Lage des Punktes C auf der unendlich fernen Ebene. Nach der Voraussetzung ist *die Richtung* C senkrecht zur *Stellung* der Ebene γ, was soviel bedeutet, als dass C der Pol ist, in Bezug auf den imaginären Kugelkreis J, von der Schnittgeraden s der Ebene γ mit U. Nunmehr wird genau wieder der oben ausgesprochene Satz sichtbar: „jener Kegel, welcher von C aus den Kegelschnitt $\varkappa$ projicirt (Kreiscylinder nach der Construction), berührt in seinen Schnittgeraden mit der unendlich fernen Ebene den imaginären Kugelkreis J."

Alle diese Vorbereitungen waren nöthig, um einen Satz zu beweisen, der sich einfach genug präsentirt: „man habe auf einem Ellipsoide einen ebenen Schnitt ϱ so geführt, dass von einem gewissen unendlich fernen Punkte C aus dieser Schnitt als Kreis erscheint (dass ϱ mit C verbunden einen Kreiskegel liefert), dann erscheinen auch alle jene Schnittcurven von C aus als Kreise, welche auf Parallelebenen zur Ebene des Schnittes ϱ liegen."

Beweis: In Figur 30 bedeute U die unendlich ferne Ebene,

Fig. 30.



J den imaginären Kugelkreis, ϱ sei die ebene Schnittcurve des (nicht gezeichneten) Ellipsoids, s sei die Schnittgerade, in welcher die Ebene von ϱ die Ebene U trifft. Ist dann nach

der Voraussetzung der Kegel von C nach der Curve ϱ ein Kreiscylinder, so ist damit gesagt, dass die Verbindungsgeraden von C nach m und n, wo der Kegelschnitt ϱ durch U durchsetzt, die Curve J berühren. Werden nun weitere Ebenen ϱ durch s gelegt (was eben einem Legen von Parallelebenen zu ϱ entspricht), so gehen die Schnittcurven des Ellipsoids mit diesen neuen Ebenen gewiss immer durch die beiden Punkte m und n; diese Schnittcurven durch s werden also sämmtlich von C aus durch Kegel projicirt, die, als durch m und n gehend und somit J doppelt berührend, Kreiscylinder genannt werden müssen.

Es sei nun (Fig. 31) U ein Rotationsellipsoid, entstanden durch Drehung einer Ellipse um die grosse Axe Ox und es sei betrachtet, wie es die Figur ergibt, von einem Augpunkte, der unendlich fern auf jener Symmetrieebene des Ellipsoids gelegen ist (in der Richtung der zum Punkte verkürzt erscheinenden Axe Oz), welche zur Rotationsaxe senkrecht steht.

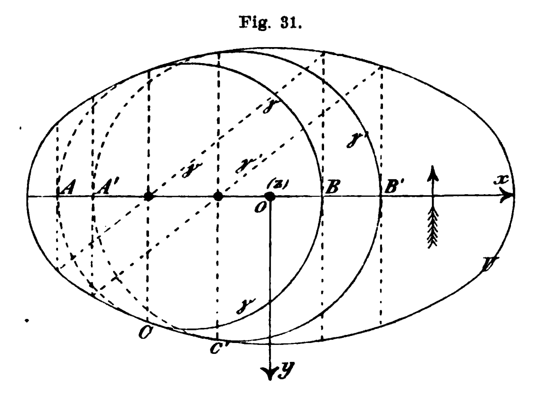
Es gibt dann gewisse ebene Schnitte auf dem Rotationsellipsoid, welche, ohne wirklich Kreise zu sein, doch dem Auge *erscheinen* als Kreise (welch' letztere überdies, wie es jede Schnittcurve des Ellipsoids thut, die Umfangscurve des Ellipsoids zweimal zu berühren scheinen). In der Figur ist ein solcher — scheinbarer — Kreis, auf der Ebene γ gelegen, wirklich sichtbar gemacht, und zwar ist die obere und untere Hälfte der Schnittcurve durch verschiedene Ausführung der Peripherie deutlich unterschieden; A bezeichnet also den tiefsten (vom Beschauer am meisten abgewendeten) und B den höchsten (dem Beschauer am nächsten zugewendeten) Punkt der räumlichen Schnittcurve.

Ueber die Stellung dieser Ebene γ zur Rotationsaxe erfahren wir aus dieser Figur noch nichts. Drehen wir aber das Ellipsoid um 90^0 um seine Rotationsaxe in der Richtung des Pfeiles, wobei die Umfangscurve U in sich selbst übergeführt wird, so wird der Winkel, den γ mit Ox macht, direct sichtbar (Fig. 32).

Man braucht also, um die Stellung aller der Parallel-

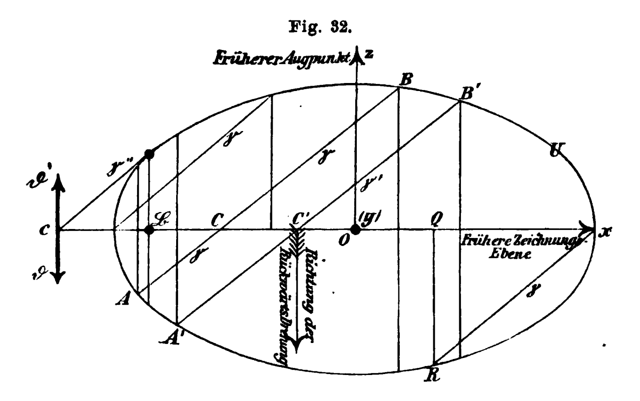
Ebenen $\gamma\gamma'$ ... zu erfahren, welche mit dem Augpunkte verbunden Kreiscylinder ergeben, nur die Figur 31 nochmals, congruent mit sich selbst, zu entwerfen, zu einer zweiten Figur 32, in welcher die beiden Senkrechten durch A und B

Fig. 31.



auf Ox an derselben Stelle geblieben sind (sie sind Bilder von Aequator-Curven auf dem Ellipsoid, welche bei jener Drehung sich nicht ändern). Der höchste und tiefste Punkt, B und A, jener Schnittcurve auf γ werden jetzt nochmals sichtbar (Fig. 32), als die Punkte, in welchen diese beiden

Fig. 32.



soeben genannten Senkrechten die Umfangscurve schneiden; die Stellung AB zu Ox ist identisch mit der gesuchten Stellung der Ebene γ zu Ox. Wird ein zweiter Schnitt γ' geführt (in der Figur 32 verkürzt erscheinend zur Strecke $A'B'$),

parallel zur Schnittebene γ, so kann hierauf die Figur 32 wiederum um 90^0 zurückgedreht werden; man erhält dann in der früheren Figur 31 einen neuen doppelt berührenden Kreis γ' (dazu hat man die Senkrechten von A' und B' auf Ox der Figur 32 in congruenter Lage in die Figur 31 zu übertragen, wo sie auf Ox zwei Punkte jenes Kreises γ' liefern) nach dem vorhergehenden Abschnitte dieses Paragraphen.

Auch die *Berührsehne* dieses neuen Kreises γ' mit der Umfangscurve kann sehr leicht gefunden werden. Man erinnere sich (§ 2), dass dieselbe die beiden Punkte verbindet, wo in der Raumfigur die räumliche Schnittcurve durch die Zeichnungsebene durchsetzt. In Figur 32 erblickt man nun sowohl die Zeichnungsebene der früheren Figur 31 (verkürzt zur Geraden Ox), als auch die räumliche Schnittcurve (verkürzt zur Strecke $A'B'$). C' gibt also ein Bild eines solchen räumlichen Durchstosspunktes auf der Zeichnungsebene; beim Zurückdrehen in die Figur 31 nimmt dieser Punkt die dort bezeichnete Lage auf der Umfangscurve U an, vorausgesetzt, dass die zu seiner Construction benutzte Senkrechte zu Ox, Fig. 31, sich genau in derselben Lage zur Figur befindet, wie sie in Fig. 32 eine Senkrechte durch C' aufweisen würde.

(In Fig. 31 wurden schliesslich die Richtungen γ und γ' eingezeichnet, um zu zeigen, wie alle Operationen an einer und derselben Figur ausgeführt werden könnten.)

§ 13.

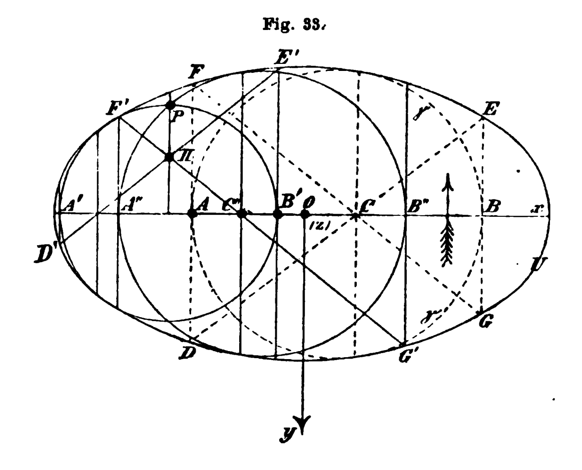
Beschreibung der Construction.

Ist also ein Punkt P im Innern einer Ellipse U gegeben, durch welchen zwei doppelt berührende Kreise gelegt werden sollen, so fasse man U als scheinbaren Umfang eines Rotationsellipsoids auf. Zunächst bestimme man (in der ebenen Figur) einen ganz beliebigen, U doppelt berührenden, Hilfskreis γ (Fig. 33), der die Axe Ox in A und B schneidet. Errichtet man Senkrechte zu Ox in diesen Punkten, so schneiden dieselben in Punkten DE, FG die Umfangscurve, welche nur verbunden zu werden brauchen, um zwei gewisse, für die

Construction von weiteren Kreisen dieser Art wichtige, Richtungen zu ergeben: DE und FG. (Es wurde diesmal für einfacher erachtet, die verschiedenen auszuführenden Operationen in einer Figur, 33, zu vereinigen, statt von zwei congruenten Figuren zu sprechen.) Und zwar ist die Bedeutung dieser Richtungen DE, FG die, dass alle Strecken (Secanten) parallel zu ihnen aufgefasst werden können als Bilder von Schnittcurven von Kreiscylindern mit dem Ellipsoid.

Durch den Bildpunkt P ein solches kreisförmiges Bild zu legen, ist nicht direct möglich: wohl aber können wir durch sein Bild Π, *in welchem* P *nach der Drehung erscheint*, zwei

Fig. 33.

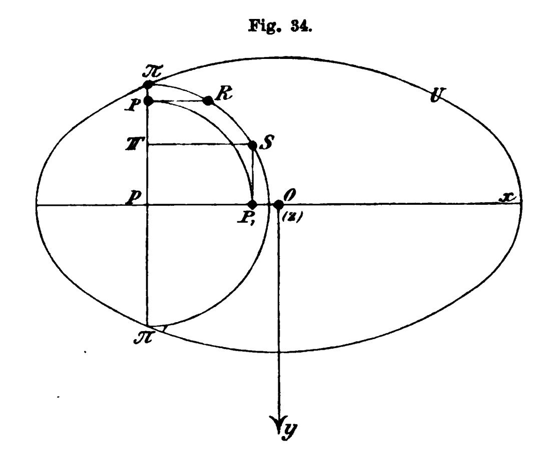


Strecken parallel zu DE und FG ziehen (mit andern Worten, wenn dieses sein zweites Bild seine Entfernung von der Zeichnungsebene, seine Erhebung über dieselbe enthält). — So bliebe nur noch die folgende kleine Hilfsaufgabe zu lösen: ein Punkt P der Figur 33 bedeute einen Punkt auf der oberen Hälfte eines Rotationsellipsoids; dasselbe werde um 90^0 in der Richtung des Pfeiles gedreht, wo scheint nach der Drehung jener Punkt P zu liegen? Er erscheint dann eben von der, fest verbleibenden, Geraden Ox in derselben Entfernung, die er von vornherein von der Zeichnungsebene hatte. Diese letztere kann man sich aber so verschaffen: man zieht (Fig. 34) durch P die Senkrechte auf Ox, $\pi\pi'$; damit ist $\pi\pi'$

als Durchmesser jenes Aequatorkreises bekannt, auf welchem P liegt. Eine Seitenansicht dieses Aequatorkreises erhält man, indem man einen Kreis über $\pi\pi'$ als Durchmesser construirt. Die Senkrechte durch P auf $\pi\pi'$ ergibt PR direct als Betrag des gesuchten Abstandes des Raumpunktes P von der Zeichnungsebene.

Es bezeichne Π das Bild des Punktes P nach der Drehung; dann kann man Π direct erhalten, indem man $pP_1 = pP$ macht, die Senkrechte P_1S auf Ox stellt wiederum jenen Abstand vor ($P_1S = PR$); eine Parallele zu Ox durch S schneidet den Punkt Π aus.

Fig. 34.



Wir fahren nunmehr fort, die Figur 33 zu vervollständigen, wie folgt: Nachdem Π eingetragen, führt man durch ihn zwei Gerade in der Richtung von DE, FG; sie schneiden das Ellipsoid in Punktepaaren $D'E'$, $F'G'$. Senkrechte von diesen Punktepaaren auf Ox herabgefällt, liefern durch ihre Fusspunkte $A'B'$, $A''B''$ auf Ox direct Punkte der gesuchten beiden Kreise.

Aber auch die beiden Berührsehnen sind direct der Figur zu entnehmen: sie gehen, senkrecht zu Ox, durch jene Punkte, in welchen die Gerade $D'E'$, $F'G'$ diese Gerade Ox treffen.

Die Figur 34a bringt nochmals eine solche Construction; diesmal wurde auch die Bestimmung des Punktes Π gleich

in der ursprünglich vorgegebenen Figur ausgeführt. Als Hilfskreis γ wurde jener Kreis gewählt, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt.

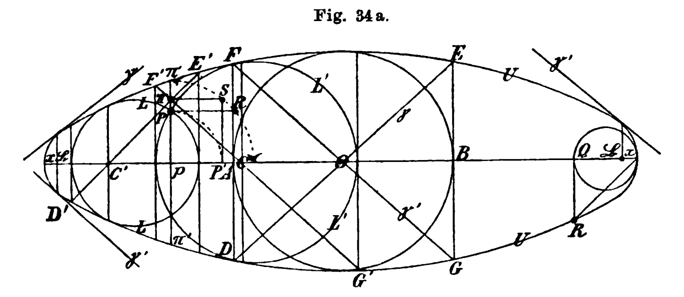
Die Figur stellt verschiedene Lagen einer Raumfigur, in ihr zusammengeschoben, dar.

§ 14.

Krümmungskreis und Brennpunkte.

Die parallel zur Richtung γ geführte Secante der Ellipse U in Figur 32 kann zu dieser Figur zwei besonders ausgezeichnete Lagen annehmen, die denn auch, wie wir sogleich

Fig. 34 a.



LL' zwei doppelt berührende Kreise an U durch P. Krümmungskreis im Endpunkte der grossen Axe. Construction der beiden Brennpunkte $\mathfrak{S}$.

sehen werden, besondere Lagen des zu ihnen gehörigen doppeltberührenden Kreises bestimmen.

I. Geht nämlich jene Secante durch einen Endpunkt der grossen Axe (xR in Figur 32), so fällt der früher immer mit C bezeichnete Punkt, in welchem die Secante durch Ox durchsetzt, mit diesem Endpunkte selbst zusammen. Das heisst: die nach der Rückwärtsdrehung der Figur sichtbar werdende Berührsehne für den doppelt berührenden Kreis *berührt* die Ellipse im Endpunkte der grossen Axe (Fig. 34a). In diesem Endpunkte sind also die vier Schnittpunkte von Kreis und Ellipse vereinigt. Denn jede gewöhnliche Berührsehne enthält in ihren Endpunkten die zweimal zwei gemeinschaftlichen Punkte der beiden Curven, die also alle zusammenrücken,

wenn die beiden Schnittpunkte der Berührsehne mit U in einen einzigen Punkt zusammenfallen. — Da jeder Kreis, der eine Curve wenigstens dreipunktig berührt, ein Krümmungskreis genannt wird, so haben wir nunmehr den „Krümmungskreis im Endpunkte der grossen Axe“ gefunden.

(Im Anhang [§ 21] wird nachgewiesen werden, dass es für jeden Kegelschnitt nur eine beschränkte Anzahl von Stellen gibt, in welchen Kegelschnitte durch zwei feste Punkte jenen vorgegebenen vierpunktig berühren; und im Schlussparagraphen Nr. 25 wird gezeigt werden, wie auch für die Endpunkte der grossen Axe der Krümmungskreis einfach construirt werden kann.)

Wir geben nunmehr die ausführliche „Vorschrift zur Construction des Krümmungskreises im Endpunkte der grossen Axe“:

„Man construire (Fig. 34a) einen beliebigen doppelt berührenden Kreis AB, bestimme die Punkte DE und damit die Richtung γ; hierauf ziehe man durch den Endpunkt der grossen Axe die Secante xR parallel zu dieser Richtung. Die Senkrechte RQ auf Ox liefert durch ihren Fusspunkt Q einen weitern Punkt des Krümmungskreises durch jenen Endpunkt.“

II. Ebenso wichtig ist die Discussion des Falles, wo die Secante zur Tangente an U wird (γ'' in Figur 32).

Der doppelt berührende Kreis artet (wie auch die räumliche Schnittcure auf der Ebene γ'' selbst) in einen *Punkt* aus. Die gemeinschaftliche Berührsehne der beiden Curven — Ellipse U einerseits, ausgearteter Kreis andrerseits — existirt aber nach wie vor und wird erhalten, indem man, wie bisher immer, die Secante γ'' zum Schnitte bringt mit Ox (und hierauf im Schnittpunkte c eine Senkrechte errichtet, die Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ der Figur 32; — sie ist ausnahmsweise gleich um 90° gedreht gezeichnet, statt sie zum Punkte c verkürzt zu geben, wie es speciell dieser Figur entspräche). Es sei $\mathfrak{B}$ der Fusspunkt jener Senkrechten auf Ox, welche ge-

fällt wird vom Berührpunkte jener mit der Richtung γ'' parallel gezogenen Tangente γ''.

Von dieser Berührsehne 𝔇𝔇′ muss man immer noch aussagen, dass die auf ihr in Bezug auf die Curve U bestimmte polare Involution identisch ist mit der auf ihr in Bezug auf den unendlich kleinen Kreis 𝔅 bestimmten.

Ueber die Art der Involution aber, die ein unendlich kleiner Kreis auf einer jeden Geraden seiner Ebene bestimmt, kann kein Zweifel bestehen: jede Gerade, wie z. B. auch 𝔇𝔇′, darf als Polare seines Mittelpunkts aufgefasst werden, und es werden daher auf ihr solche Punktepaare conjugirt sein in Bezug auf den unendlich kleinen Kreis, welche durch die (rechtwinklige) Strahleninvolution des Mittelpunktes 𝔅 auf ihr ausgeschnitten werden.

Da nun 𝔅 jedenfalls der Pol von 𝔇𝔇′ ist in Bezug auf U, so sind überhaupt zwei rechtwinklige Strahlen durch 𝔅 in Bezug auf die Ellipse conjugirt; und wir hätten somit die *Brennpunkte* der Ellipse gefunden.

Wir wiederholen kurz die Schlüsse: da 𝔇𝔇′ die (ideale) Berührsehne der beiden Curven: Ellipse und unendlich kleiner Kreis 𝔅, so sind zwei Punkte auf ihr dann in Bezug auf U conjugirt, wenn sie es sind in Bezug auf den Kreis 𝔅. Conjugirte Punkte auf 𝔇𝔇′ für letztern Kreis erhält man durch Construction rechter Winkel durch 𝔅. 𝔅 ist der Pol von 𝔇𝔇′ in Bezug auf U: damit sind die Punkte 𝔅 als Brennpunkte nachgewiesen: denn ihre polare Involution in Bezug auf U ist die der rechten Winkel.

Die oben gemachte Bemerkung: „für einen unendlich kleinen Kreis 𝔅 ist die Involution jeder Geraden identisch mit der von der rechtwinkligen Involution des Mittelpunkts 𝔅 auf ihr ausgeschnittenen“ ist ein vollkommen *strenger*, wissenschaftlich zulässiger Schluss. Man schloss ebenso, wie ja umgekehrt ganz sicher die polare Involution einer immer mehr sich ins Unendliche entfernenden Geraden in Bezug auf einen fest bleibenden endlichen Kreis schliesslich immer mehr der von der Mittelpunktsinvolution desselben Kreises auf ihr ausgeschnittenen sich nähert; weil ja beim Entfernen ins Unend-

liche jene bewegliche Gerade schliesslich selbst „*die*“ unendlich ferne Gerade wird, auf welcher alle Kreise dieselbe Involution besitzen, die der rechten Winkel durch den Mittelpunkt. —

Wir geben also folgende „Construction der Brennpunkte einer Ellipse“ (Fig. 34a).

„Man bestimme einen doppelt berührenden Hilfskreis AB, sodann die Punkte $\begin{cases} DE \\ FG \end{cases}$, um die Richtungen γ, γ' zu gewinnen. Zieht man parallel zu γ, γ' Tangenten an U, so liefern die Fusspunkte der vom Berührpunkte auf Ox gefällten Perpendikel direct die Brennpunkte $\mathfrak{B}$ der Ellipse.“

Anm.: Wichtig erscheint nur noch die Bemerkung, dass man, wenn von einer vorgegebenen Ellipse auch die Brennpunkte bekannt sind, mit Hilfe derselben die Richtungen $\gamma\gamma'$ finden kann, indem man in einem Brennpunkte die Senkrechte zur grossen Axe errichtet und durch die Schnittpunkte derselben auf der Curve die Tangenten an letztere zieht.

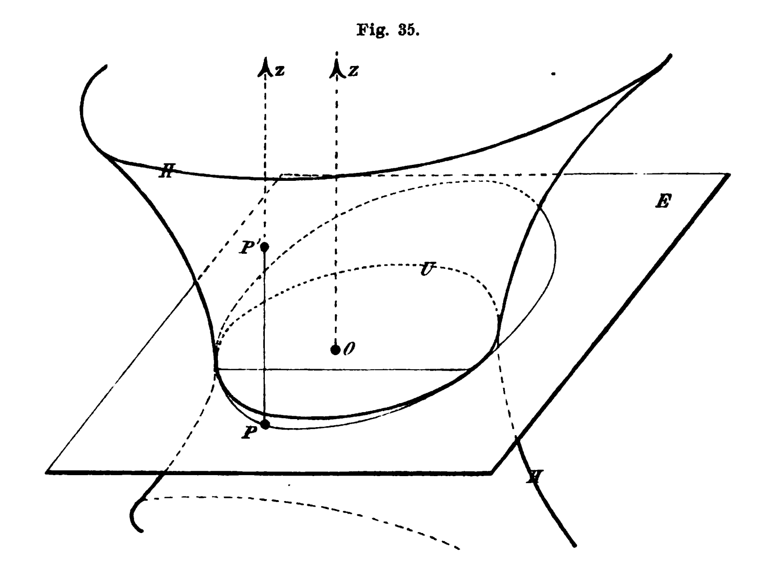
§ 15.

Was wir bisher für P *innerhalb* der Ellipse gemacht haben, ist verhältnissmässig übersichtlich geblieben, da die zur Construction des Berührkreises nöthigen Operationen, obwohl fortwährend durch *Raumvorstellungen* ihre Erklärung findend, immerhin *in einer und derselben Figur* ausgeführt werden konnten, ohne dieselbe allzusehr zu compliciren.

In der Figur 35 ist durch eine Skizze angedeutet, wie sich dagegen die Lösung für den Fall eines *ausserhalb* U gelegenen P erledigt: man legt durch U ein einmanteliges Hyperboloid H symmetrisch zur Ebene E und construirt dann irgend einen Kreis, der U zweimal von aussen berührt. Wird dieser Kreis von der Richtung des unendlich fernen Punktes auf Oz aus projicirt auf die Fläche H durch einen Kreiscylinder, so erhält man eine ebene räumliche Schnittcurve (dieselbe ist in Fig. 35 nicht gezeichnet), die eine bestimmte Stellung γ von Ebenen anzeigt, welche alle die Eigenschaft

haben, jenes Hyperboloid in Curven zu treffen, die wiederum als Kreise erscheinen — von jenem unendlich fernen Projectionscentrum aus betrachtet. Ist nun ein Punkt P ausserhalb U gegeben, so wird man durch ihn und jenen unendlich fernen Punkt auf Oz eine Gerade legen, die die Fläche in P' trifft (sodass also P das Bild eines räumlichen Flächenpunktes P'). Durch den Raumpunkt P' legen wir eine Ebene von jener Stellung γ, die eine Schnittcurve von unsrer gewünschten Art auf der Fläche gibt; welche nämlich — wiederum vom unendlich fernen Punkte auf Oz aus auf die Zeichnungs-

Fig. 35.



ebene U herab projicirt — direct eine Lösung ergibt: einen doppelt berührenden Kreis an U durch P.

Alles das ist mit *darstellender Geometrie* auszuführen und erfordert die Aufstellung von mehreren, unter einander abhängigen, Figuren, die wohl nicht mehr zu einer einzigen Zeichnung vereinigt werden könnten. Man sieht, wie sich die Lösung in diesem Falle viel weitschweifiger gestaltet, als im günstigeren Falle eines im Innern gegebenen P.

Ist der vorgegebene Kegelschnitt eine *Hyperbel*, so kann erstens P *innerhalb* dieser Curve fallen. In diesem Falle führt

wieder die Annahme zum Ziele, die Curve sei das Bild eines zweimanteligen Rotationshyperboloids, entstanden durch Umdrehung einer Hyperbel um die reelle Axe.

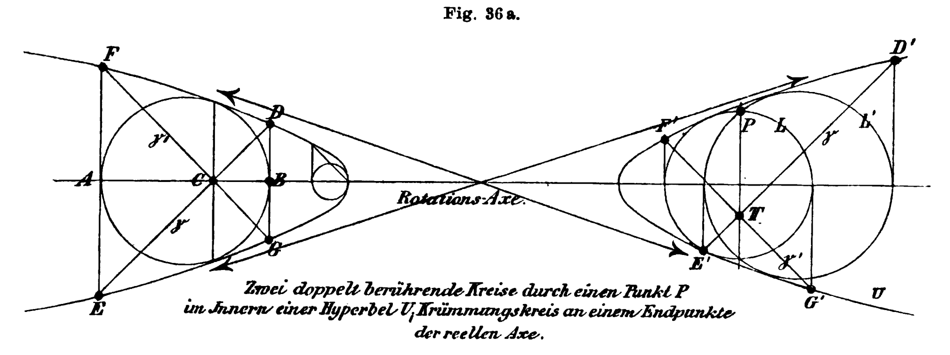
Genau dieselben Hilfsmittel, nämlich einfache Betrachtungen über das Parallel-Stehen der Ebenen gewisser als Kreisschnitte *erscheinender* Schnittcurven, führen zum Ziele (auch die Brennpunkte können, wenn mit der Curve vorgegeben, zur Construction benutzt werden, nach § 14 Anm.).

Ist die Curve eine Hyperbel, zugleich aber *P ausserhalb*, so betrachte man sie als das Bild eines einmanteligen Rotationshyperboloids, entstanden durch Umdrehung einer Hyperbel um die imaginäre Axe.

Für diesen, letzten, Fall: *P ausserhalb* einer *Hyperbel*, führt die Discussion der Figur nicht mehr auf Krümmungskreis oder Brennpunkt.

Indem noch auf die Figuren 36a und 36b verwiesen sei*), die alle hierher gehörigen Constructionen enthalten, für den

Fig. 36a.



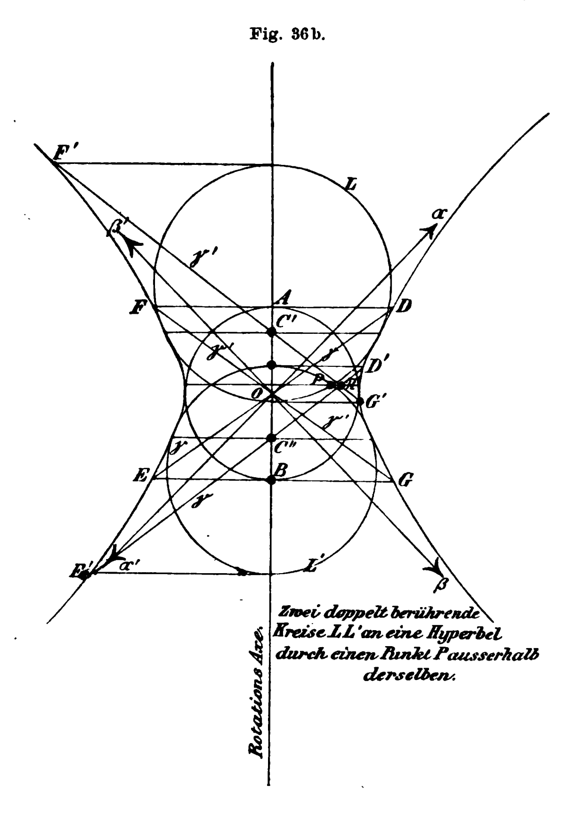
Fall, wo eine *Hyperbel* vorgegeben, wollen wir zum Schlusse dieses Abschnitts einen kurzen Ueberblick werfen über die in §§ 13—15 mitgetheilte Methode.

Dieselbe empfiehlt sich durch grosse Uebersichtlichkeit; die wenigen zur Durchführung der Lösung nöthigen Constructionen können leicht der Vorstellung und dem Gedächtniss eingeprägt erhalten bleiben, sobald man einmal die wenigen

*) In beiden ist die Hilfsconstruction des Punktes Π weggelassen.

Schlüsse erfasst hat, auf die sich die Methode gründet. — Aber diesen Vortheilen gegenüber soll auch bemerkt werden, dass sich jene Methode nicht auf alle möglichen Fälle, wie sie die Stellung des Problems mit sich bringen kann, in gleichmässiger Wirksamkeit anwenden lässt; dass der Fall: „*U* Ellipse, *P* ausserhalb“ Schwierigkeiten bringt, deren Er-

Fig. 36b.



ledigung uns aus dem hier bestimmten Rahmen weit hinausführen würde.

Für diesen Fall bleibt also immer noch die *erste* Lösung, § 8, des Problems zu empfehlen; doch sei vorgreifend bemerkt, dass für die nunmehr aufzustellende *dritte* Lösungsmethode gerade wieder dieser Fall: „*U* Ellipse, *P* ausserhalb“, die günstigsten Voraussetzungen enthält.

Ganz übergangen wurde bisher der Fall, wo U *imaginär*. In diesem Falle kann man durch ihn ein reelles zweimanteliges Hyperboloid H legen, welches die Zeichnungsebene von U als Symmetrie-Ebene aufweist. Man kann dann einen Hilfskreis aufstellen, der in der Ebene des imaginären U diesen Kegelschnitt doppelt berührt, diesen Hilfskreis auf H projiciren, um die Stellung γ der scheinbaren Kreisschnittebenen zu erfahren u. s. w. Aber das sind Constructionen, die zum Theil ganz neue Besprechungen erfordern, theilweise vollständig dem Gebiete der darstellenden Geometrie angehören würden. Auch für diesen Fall ist die erste Lösung vorzuziehen.

Dritter Abschnitt.

§ 16.

Wir wenden uns abschliessend einer dritten Lösung des in den Eingangsworten aufgestellten Problems zu, die wiederum nur mit Hilfe des Raumes erledigt werden kann und sich nicht ohne Hilfe der darstellenden Geometrie, d. h. nicht ohne Aufstellung von *Hilfsfiguren* durchführen lässt, — während die vorige Methode es noch gestattete, alle vorkommenden Operationen in einer einzigen, nicht allzu verwickelten, Figur zu vereinigen.

Schon hieraus ist zu entnehmen, dass der Unterschied zwischen der zuletzt besprochenen Methode und der nunmehr aufzustellenden ein wesentlicher ist; noch mehr — und das ist der Hauptgrund, weshalb wir auf die Mittheilung dieses weiteren Lösungsweges nicht gerne verzichten möchten — es wird sich, wie schon bemerkt, ergeben, dass gerade diese dritte Methode sich mit Vortheil anwenden lässt in einem Falle, wo der Weg des vorhergehenden Abschnitts nicht zum Ziele führt (und umgekehrt: diese neue, dritte, Methode wird eine Lücke zeigen gerade an einer Stelle, wo die zweite weiterhilft). So ergänzt sich dieser neue Abschnitt mit dem zweiten aufs Vollständigste in der Art, dass schliesslich für jede mögliche Combination der Bestimmungsstücke mit Sicherheit wenigstens *ein* Weg bezeichnet werden kann, der, entweder auf den zweiten oder dritten Abschnitt sich stützend, zu besonders einfacher Erledigung der Aufgabe führt.

Wir werden nunmehr wiederum weit ausholen müssen; es wird uns nicht erspart bleiben, einige Hilfssätze und Hilfsprobleme zu behandeln, die uns schliesslich ermöglichen sollen,

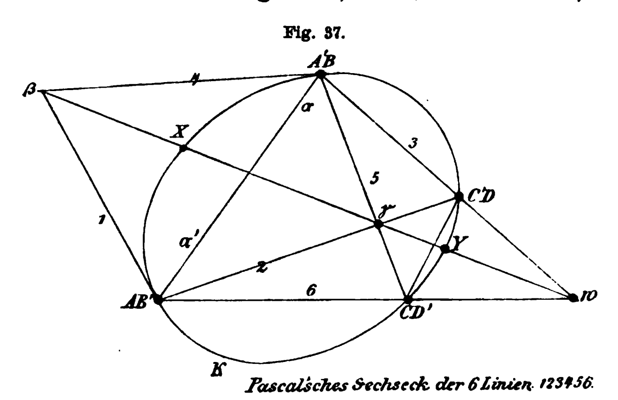
über die vollständige Construction der Lösung einen Ueberblick zu gewinnen und dieselbe im Zusammenhange darstellen zu können. Wir werden wieder unsre Kräfte an der Lösung einer Aufgabe, die *imaginäre* Bestimmungsstücke aufweist, zu versuchen haben und werden finden, dass die Hilfsmittel, die zur Bewältigung der Aufgabe schliesslich führen, nicht ganz leicht anzugeben sind — obwohl in der Figur selbst vorliegend, wie immer.

Immerhin wird auch diesmal der scheinbare Umweg, den wir nun einschlagen, nicht ohne Lohn sein; es wird sich Gelegenheit ergeben, mehrere interessante Capitel der synthetischen Kegelschnitttheorie zu berühren und zwischen ihnen einen Zusammenhang herzustellen.

Anm. 1. In diesem Einleitungsparagraphen sollen denn auch gleich einige Vorbereitungen für die vollständige Lösung getroffen werden; es sei zunächst gestattet, einen in synthetischen Schlüssen oft benutzten Satz hier vorauszuschicken sowie hieran in einer zweiten Anmerkung eine Besprechung des schon früher erwähnten Hesse'schen Satzes zu knüpfen

„Liegen (Fig. 37) zwei zu einander projectivische Punktreihen auf demselben Träger so, dass, wenn ABC, $A'B'C'$

Fig. 37.



Pascalsches Sechseck der 6 Linien 123456.

entsprechende Punkte der beiden Reihen sind, zugleich A mit B' und A' mit B zusammenfällt, so liegen die beiden Punktreihen in Involution." (D. h. entspricht irgend einem Punkte F der ersten Reihe der Punkt F' der zweiten Reihe, so entspricht

dem Punkte F', als Punkt der ersten Reihe aufgefasst und demnach mit E bezeichnet, ein Punkt E' der zweiten Reihe, der mit F zusammenfällt.) „Jene beiden Stellen, wo ein Punktepaar der Involution sich auf einen Punkt zusammenzieht, X und Y, sind ferner durch jedes zusammengehörige Punktepaar der Involution harmonisch getrennt.“

Dieser Satz gehört zu den fundamentalen Theoremen der synthetischen Geometrie, sein Beweis, der mit oder ohne Zuhilfenahme der Kegelschnitttheorie möglich ist, kann in irgend einem Lehrbuche nachgelesen werden (v. Staudt, Geometrie der Lage, I, Art. 215, 216; Reye, Geometrie der Lage, I, 1877, pag. 117). Handelt es sich darum, sich jenen Beweis recht anschaulich zu machen, in einer Form, die sich leicht dem Gedächtniss einprägt, so sei es gestattet auf die beifolgende Figur (37) zu verweisen, die in sich selbst, — d. h. in der mittelst Kegelschnitttheorie bewiesenen Möglichkeit so zu zeichnen, wie sie sich mit ihren Bestandtheilen von Punkten und Tangenten präsentirt, — den Beweis für unsern Satz enthält.

Es wurden (vergl. Reye a. a. O.) die drei Punkte ABC und $A'B'C'$, die auf dem Kegelschnitte K die vorgegebenen Punktreihen abbilden mögen, gezeichnet, um mit dem Mittelpunkt A' einerseits, A andrerseits verbunden zu werden zu zwei Strahlbüscheln $A'(ABC)$ und $A(A'B'C')$. Diese beiden Strahlbüschel zeigen in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt; daher ist für sie der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Gerade.

Indem wir aber das Viereck bilden $AC'BC$ und die beiden Tangenten in A und A' dazu nehmen, erhalten wir schliesslich ein Pascal'sches Sechseck mit den drei Gegenseitenpaaren $\begin{cases}\text{Tangente in } A \\ \text{Tangente in } A'\end{cases}$, $\begin{cases}AC' \\ A'C\end{cases}$, $\begin{cases}A'C' \\ AC\end{cases}$, welches uns lehrt, dass die drei Punkte $\beta\gamma w$ der Figur auf einer Geraden liegen. Damit ist aber gesagt, dass dem Punkte C, wenn man ihn als der zweiten Reihe angehörig mit D' bezeichnet, ein Punkt D der ersten Reihe entspricht, der mit C' zusammenfällt. Denn alle Punkte w der Verbindungslinie $\beta\gamma$ liefern ja ent-

sprechende Punkte der beiden Reihen, indem man sie mit A' und A verbindet.

Ferner kann nun γ seine Lage verändern auf der fest bleibenden Geraden $\beta\gamma w$; man erhält dann immer wieder die Figur des vollständigen Vierecks mit einem Gegenseitenschnittpunkt auf dieser Geraden; und aus der Existenz einer neuen Figur, in welcher ein Punktepaar EE' an die Stelle tritt von CC' in Figur 37, sonst aber sich nichts geändert hat, schliesst man auf das doppelte Entsprechen auch von EE'.

Ferner gehen noch die Geraden AA' und CC' durch den Pol von $\beta\gamma$, oder von XY; mittelst einiger einfacher Schlüsse aus der Polarentheorie findet man, dass die vier Punkte XY und CC' von irgend einem Punkte des Kegelschnitts aus erscheinen als paarweise einander harmonisch trennend.

Anm. 2. „Sind je zwei Gegenecken eines Vierecks conjugirt in Bezug auf einen Kegelschnitt, so sind es auch die beiden Schnittpunkte der Gegenseitenpaare.“

Dieser Satz, gewöhnlich nach Hesse benannt, findet sich an verschiedenen Stellen seiner Werke (Crelle J. 20, pag. 301, und 36, pag. 146). Wegen des synthetischen oder analytischen Nachweises des Satzes vergl. Fiedler-Salmon Kegelschnitte Art. 236, 9; Cremona, curve piane 109; Chasles, sect. coniques 133; Schröter-Steiner Kegelschnitte § 31; Rosanes Schlöm. Zeitschrift 17, pag. 174.

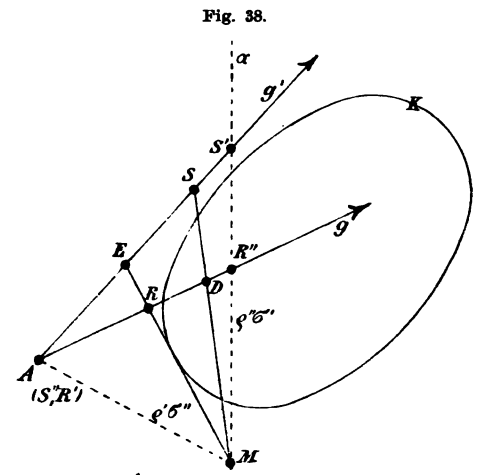
Dieses Literaturverzeichniss, nach Baltzer „Analytische Geometrie“ pag. 212 mitgetheilt, sei hier vervollständigt durch die Einfügung von v. Staudt G. d. L. I, art. 244; Hesse: „Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte“, pag. 32; Durège, ebene Curv. III. Ordn. § 121; Schröter-Steiner Kegelschnitte § 56; Clebsch-Lindemann Geometrie pag. 528; sowie Franz Meyer: „Rein geometrische Beweise einiger fundamentaler Kegelschnittsätze“, Tübingen 1885, pag. 8.

Dieses Theorem nimmt unverkennbar unter den Sätzen der synthetischen Geometrie eine ausgezeichnete Stellung ein. Es unterscheidet sich vom übrigen Inhalt dieses Zweigs der mathematischen Wissenschaften durch eine gewisse Eleganz.

Während nämlich für gewöhnlich die Synthese so operirt, dass sie gewissermassen Satz und Beweis immer gleichzeitig bringt, indem hier besonders sich jeder Satz ganz unmittelbar auf den vorausgehenden stützt und seinen Beweis in etwas nüchterner Weise regelmässig an denselben anknüpft, mag unser Satz überraschen dadurch, dass sein Beweis nicht ganz direct ins Auge fällt, obwohl seine Aussprache nur die einfachsten Begriffe aus der Polarentheorie enthält. — Allzuschwierig ist der Beweis auch für ihn nicht; wenn ich im Nachfolgenden einen weiteren solchen Beweis mittheile, so geschieht es deswegen, weil gerade er die bequemste Anknüpfung bietet für die darauf folgende Hilfsaufgabe.

Beweis des Satzes. Es sei (Fig. 38) K ein Kegelschnitt, A und M zwei conjugirte Punkte desselben, so dass also die Polare α von A durch M geht; $g\,g'$ seien zwei beliebige Gerade durch A. Nun kann man auf g' einen beweglichen Punkt S beliebig annehmen und mit seiner Polaren die Gerade g in R schneiden (d. h. man kann den zu S conjugirten Punkt R auf g suchen). Projicirt man beide bewegliche Punkte S und R von M aus durch zwei Strahlbüschel, so kann man nach deren gegenseitiger Beziehung fragen. Zunächst ist klar, dass die Bewegung des Strahls nach R projectivisch ist zur Bewegung des Strahls nach S; wir können aber auch zeigen, dass die beiden Strahlbüschel $M(R)$, $M(S)$ *involutorisch* liegen, d. h. dass man *auf den Strahl MS* durch unsere eben gegebene Construction *schliesslich gelangen* würde, wenn man, *vom Strahle MR ausgehend*, denselben die Gerade g' schneiden liesse in E und hierauf den zu E conjugirten Punkt D auf g bestimmte.

Fig. 38.



Sobald also bewiesen ist, dass die beiden Strahlbüschel nach S und R in Involution liegen, ist auch ausgesprochen, dass die Punkte D und E conjugirt sind, wenn D auf der Verbindungslinie von M nach S gelegen, sowie E auf jener von M nach R.

Um nun die involutorische Lage zu beweisen, genügt es zu zeigen (Anm. 1), dass *ein* Paar von Strahlen existirt, die sich doppelt entsprechen.

Es sei die durch M gehende Polare des Punktes A nunmehr mit σ' bezeichnet, dann kann man das zugehörige ϱ' bestimmen wie folgt: σ' schneide g' in S'; die Polare von S' geht aber deswegen durch A, weil S' auf der Polaren von A liegt; demnach ist der zu S' (auf g') gehörige Punkt R' (auf g) diesmal kein andrer als A selbst; und zum Strahl σ' durch M gehört als entsprechender die Verbindungslinie MA, die als entsprechender Strahl zunächst mit ϱ' bezeichnet sei.

Fasst man dieselbe Verbindungslinie MA als vorgegeben auf und nennt sie etwa σ'', so trifft sie g' in A; — die Polare von A ist aber nichts andres als die Gerade MS', welche g in R'' treffen möge. R'' ist dann der dem Punkte A entsprechende Punkt, wobei letzterer als S'' zu bezeichnen. Daher gehört zum Strahl σ'' als entsprechender $MR''S'$, der also mit ϱ'' zu bezeichnen ist.

Da also die beiden Büschel $M(R)$ und $M(S)$ ein Paar $\varrho'\sigma'$ oder $\varrho''\sigma''$ doppelt entsprechender Strahlen besitzen, liegen sie in Involution (Anm. 1); d. h. in der Figur würde ebenso der Punkt D aus E sich ergeben, wie sich R aus S ergibt: D und E sind conjugirt.

Wir umfahren nun das folgende Viereck in der angegebenen Reihenfolge der Ecken: $ARMS$; die zwei Paare von Gegenseiten sind für dasselbe erstens $\left\{\begin{matrix}AR\\MS\end{matrix}\right\}$ und zweitens $\left\{\begin{matrix}AS\\RM\end{matrix}\right\}$; die ersteren schneiden sich in D, letztere in E. Als Voraussetzung hatten wir nur aufgestellt, dass A und M von vornherein conjugirt wären, sowie R und S; demnach der Satz: „wenn im Viereck $ARMS$ zweimal zwei gegenüberliegende Ecken, AM, RS, conjugirt sind in Bezug auf K,

so sind es auch die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare, *DE*."

Artet der vorgegebene Kegelschnitt *K* in ein Geradenpaar aus, so erhält man den Satz von § 7, pag. 26; nach dualistischer Uebertragung lautet derselbe:

„Trennen zwei Punkte zwei von den Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierseits harmonisch, so trennen sie auch das dritte Gegenseitenpaar harmonisch."

Werden die beiden Punkte zu den imaginären Kreispunkten der unendlich fernen Geraden, so erhält man den Satz: „Stehen in einem vollständigen Vierseit zweimal gegenüberliegende Seiten aufeinander senkrecht, so thun dies auch die Diagonalen." *Dies ist der Satz vom gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Höhen im Dreieck.*

§ 17.

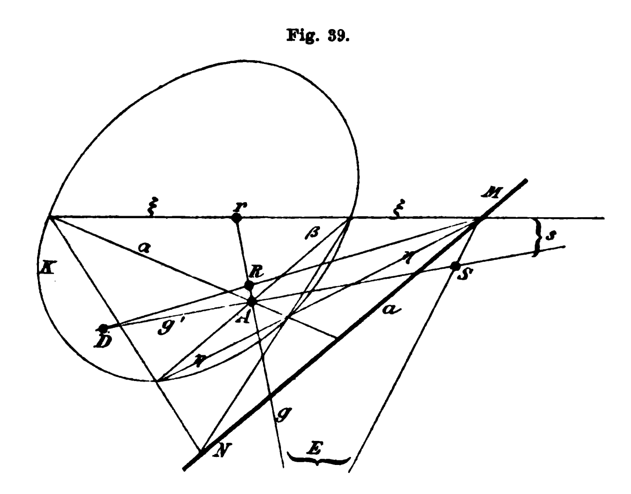
Schon früher einmal, bei einer Besprechung der Figur 9, wurde erwähnt, wie es nicht allzuschwierig sei, die reell verbleibenden Gegenseitenschnittpunkte *MN* jenes Vierecks anzugeben, welches bestimmt wird auf einem vorgegebenen Kegelschnitt *K* durch die vier Schnittpunkte gewisser zwei durch einen Punkt *A* gelegten Geraden — für den Fall, wo diese beiden Geraden $\alpha\beta$ imaginär werden. In wenigen Worten konnte damals geschlossen werden: *M* und *N* sind erstens conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt selbst, zweitens harmonisch getrennt in Bezug auf $\alpha\beta$, können daher immer durch eine aus diesen Definitionen folgende Construction erhalten werden. Aber es wurde auch damals schon bemerkt, dass es viel schwieriger sei, für imaginär werdendes $\alpha\beta$ *ein Paar Gegenseiten,* $\xi\eta$ durch *M* oder $\xi'\eta'$ durch *N* anzugeben (von welchen nachweislich immer eines reell bleibt).

Wir wollen die Aufgabe der Bestimmung von ξ und η durch *M* mit etwas andern Worten stellen.

Die Geraden $\xi\eta$ (Fig. 39) haben die Eigenschaft, dass jene Punkte auf ihnen, wo sie den Kegelschnitt *K* treffen, identisch sind mit jenen, wo sie von den Strahlen $\alpha\beta$ getroffen werden; d. h. zwei Punkte auf ξ (oder η), die polar

conjugirt sind in Bezug auf K, sind harmonisch getrennt durch die beiden Strahlen $\alpha\beta$, oder schliesslich: „ein Strahlenpaar der vorgegebenen Involution A trifft immer die Geraden ξ oder η in zwei Punkten, welche in Bezug auf K conjugirt sind."

Fig. 39.



Demnach kann man die Aufgabe auch so einkleiden: „ein Kegelschnitt K und eine elliptische Involution durch einen Punkt seiner Ebene, A, sei vorgegeben; man soll jene zwei Geraden $\xi\eta$ seiner Ebene bestimmen, für welche die polare Punktinvolution in Bezug auf K identisch ist mit der von der Strahleninvolution A auf ihnen ausgeschnittenen."

Diese Aufgabe bildet das wichtigste Hilfsmittel für die in diesem Abschnitte mitzutheilende dritte Lösungsmethode; sie wird uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen und soll insbesondere mit Zuhilfenahme metrischer Specialisirung und Verdeutlichung auf das Eingehendste studirt werden.

Lösung.*)

Man bemerke zunächst, dass vier besonders ausgezeichnete Punkte auf α gelegen sind (Fig. 39): zwei Schnittpunkte

*) Eine von der obigen verschiedene Lösung desselben Problems findet sich bei Lüroth: „Ueber das Imaginäre in der Geometrie", Math. Ann. VIII, Art. 50, pag. 182.

mit dem Kegelschnitt, ferner A selbst und ein Schnittpunkt mit der Polaren a von A. Diese vier Punkte sind harmonisch, demnach hat man den Satz: ξ und η trennen die Geraden von M nach A und nach N harmonisch. Dies gibt eine mit der Figur immer unzertrennlich verknüpfte *erste* Beziehung für die ξ und η; sie ist unabhängig von der Strahlinvolution A.

Zweitens: In der Figur 39 seien gg' zwei Gerade durch A, die diesmal nicht mehr ganz beliebig angenommen werden sollen, sondern construirt werden als das vorgegebene Strahlenpaar $\alpha\beta$ harmonisch trennend. — Es sei bemerkt, dass wir zunächst auf den Beweis des folgenden Satzes hinarbeiten: „zwei Punkte R, S auf diesen Geraden, R auf g, S auf g', trennen die beiden Strahlen $\xi\eta$ harmonisch (werden von M aus durch zwei Strahlen MR, MS projicirt, welche $\xi\eta$ harmonisch trennen), sobald nur R und S conjugirt sind in Bezug auf K." Wie wichtig dieser Satz für unsre Lösung ist, liegt auf der Hand: ist er erwiesen, so brauchen wir ja nur zwei beliebige solche Gerade gg', welche $\alpha\beta$ harmonisch trennen, anzunehmen und auf ihnen zwei Punkte R und S zu zeichnen, die polar conjugirt sind in Bezug auf K. Dann hätten wir eben zwei Beziehungen für die $\xi\eta$, noch dazu von der Art wie wir sie verlangen; welche nämlich nicht gestört werden durch das Imaginärwerden von $\alpha\beta$.

Unser Nachweis wird sich darauf stützen, dass die beiden Strahlbüschel von M nach R und S involutorisch liegen und $\xi\eta$ als Doppelelemente aufweisen.

Um Ersteres zu beweisen, können wir nach den vorausgehenden Ergebnissen (§ 16) ganz kurz sagen:

Es seien R und S conjugirte Punkte (Fig. 39); im Viereck $ARMS$ sind D und E Gegenseitenschnittpunkte, *sind demnach ebenfalls conjugirt* (die Gegenecken AM sind es nach der Figur). Demnach sind die Strahlbüschel MS und MR in involutorischer Lage. Die beiden Geraden gg' treffen nun ξ in zwei Punkten r und s, welche nach der Voraussetzung (gg' trennen $\alpha\beta$ harmonisch) harmonisch sind. Sucht man daher zu s auf g' den polar conjugirten Punkt auf g, so ist das der Punkt r.

Demnach ist ξ ein Doppelelement der Strahleninvolution MS, MR; — rMs entspricht sich ja selbst. Dasselbe gilt von der Geraden η.

Daher ist unser oben aufgestellter Satz in der That bewiesen: die beiden Geraden $\xi\eta$ trennen ein beliebiges Punktepaar RS harmonisch, wenn nur letztere conjugirt sind in Bezug auf K und auf zwei Geraden liegen, die das Strahlenpaar $\alpha\beta$ harmonisch trennen.

Um nunmehr die Geraden $\xi\eta$ durch M zu finden, construire man also zwei Gerade gg' durch A, welche der vorgegebenen Involution A angehören und bezeichne auf denselben irgend zwei in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirte Punkte RS. Alsdann sind die Geraden $\xi\eta$ durch M bestimmt als jene, welche sowohl die Richtungen nach A und N, als auch jene nach R und S harmonisch trennen.

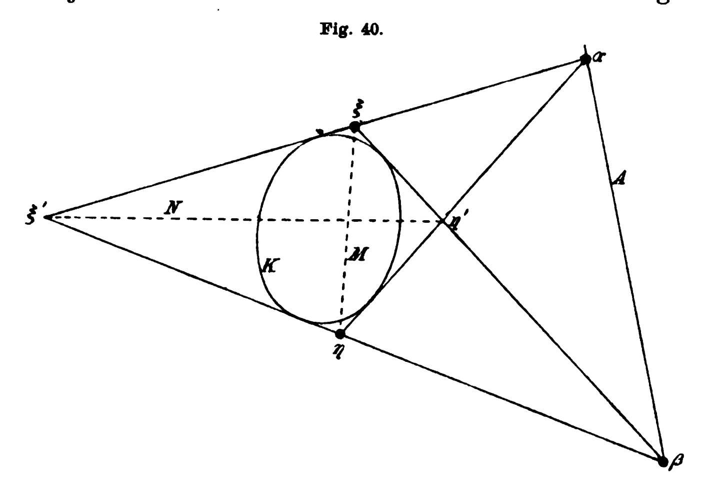
Diese Dinge werden uns in ganz verschiedener Gestalt wieder begegnen, wenn wir jetzt zur metrischen Specialisirung des Problems übergehen; auch später sollen die zur Herstellung des Beweises nöthigen Schlüsse in möglichster Vollständigkeit wiederholt werden.

Eine *dualistische* Uebertragung desselben Problems führt auf die Bestimmung der *Brennpunkte*. Diese Punkte haben bekanntlich die Eigenschaft, dass für sie die zum Kegelschnitt gehörige Strahlinvolution zusammenfällt mit derjenigen, die man erhält, wenn sie mit den auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Punkten der (rechtwinkligen) Kreis-Mittelpunktsinvolution verbindet. Suchen wir für diese Verhältnisse ein reelles Bild zu gewinnen, indem wir die imaginären Kreispunkte reell zeichnen, so haben wir eine Figur zu Grunde zu legen (Fig. 40), wo von zwei Punkten $\alpha\beta$ einer Geraden A aus die Tangenten an einen Kegelschnitt construirt und hiermit auch Schnittpunkte $\xi\eta$ dieser Tangenten gewonnen wurden.

Diese Schnittpunkte, ξ zum Beispiel, haben die Eigenschaft, dass je zwei durch sie gelegte Linien, welche in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, auch harmonisch getrennt werden durch die Verbindungslinien von ξ nach α und β hin. Die Figur enthält also in der That das reelle Bild der Brenn-

punkt-Construction; wir entnehmen ihr, dass es vier solcher Brennpunkte gibt. Dieselben liegen auf zwei Geraden MN, welche jedenfalls erstens einmal durch den Pol von A gehen,

Fig. 40.



dann aber auch die Punkte $\alpha\beta$ (die Bilder der imaginären Kreispunkte) harmonisch trennen, und schliesslich in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind. So sind wir wieder auf die *Axen* des Kegelschnitts gekommen.

Wäre von der Figur 40 nur vorgegeben $\alpha\beta$, $\xi\eta$, sowie ein Punkt eines dazu zu bestimmenden Kegelschnitts K, so wäre die Bestimmung dieses letzteren eine doppeldeutige Aufgabe. Daher: „durch einen Punkt gehen zwei Kegelschnitte, welche zwei vorgegebene Punkte als Brennpunkte aufweisen."

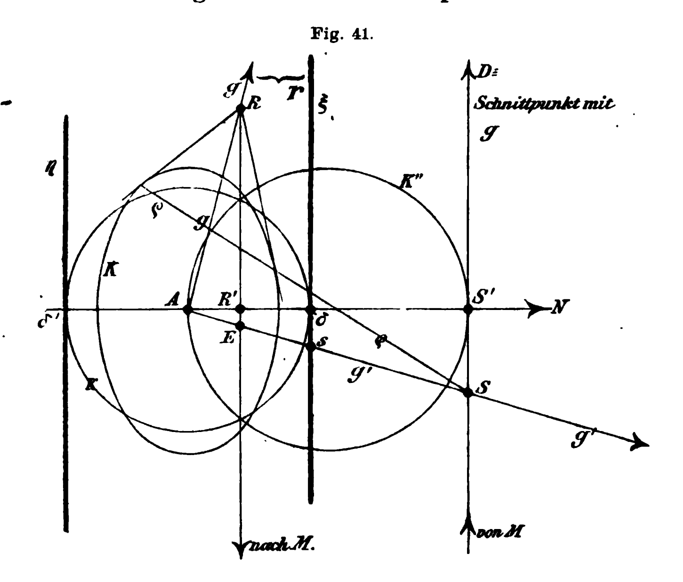
Wäre in Figur 40 vorgegeben $\alpha\beta$, sowie ein Punkt ξ; dazu drei Punkte des Kegelschnitts K, so wäre von letzterem gegeben zwei Tangenten ($\xi\alpha$, $\xi\beta$), sowie drei Punkte. Seine Bestimmung bildete demnach eine vierdeutige Aufgabe: „es gibt vier Kegelschnitte durch drei vorgegebene Punkte, welche einen weiteren vorgegebenen Punkt als Brennpunkt aufweisen."

§ 18.

In möglichster metrischer Specialisirung lässt sich das Problem des vorigen Paragraphen nochmals stellen in folgender Form:

„Gegeben (Fig. 41) ein Kegelschnitt K; gesucht jene beiden Geraden ξ und η seiner Ebene, deren polare Punktinvolution in Bezug auf K vom Mittelpunkte A durch rechte

Fig. 41.



Winkel projicirt wird“ (oder: durch den Mittelpunkt A eines Kegelschnittes K ist die Involution der rechten Winkel gelegt; gesucht zwei Gegenseiten $\xi\eta$ jenes Vierecks, welches gebildet wird von den Schnittpunkten der imaginären Doppelstrahlen der Involution A mit dem Kegelschnitte).

In Figur 41 wurde zunächst ein Paar rechtwinkliger Geraden gg' durch A beliebig angenommen; ein Punkt R wurde auf g beweglich gedacht und für jede seiner Lagen die Gerade g' mit seiner Polaren ϱ geschnitten, in S, wie es die Figur zeigt. Schliesslich wurden die beiden Punkte R und S auf die Axe AN projicirt vom unendlich fernen Punkt M der Axe AM aus, nach R' und S'. „Das Gesetz, welches die Bewegung der Punkte R' und S' verbindet, soll zunächst aufgefunden werden.“

Diese Bewegungen sind zunächst projectivisch zu einander: mit R ist ja die Bewegung seiner Polaren zunächst projectivisch, daher S mit R, schliesslich R' mit S'.

Die beiden Punktreihen R' und S' liegen aber auch *involutorisch.*

Um das zu zeigen, kann man sich zunächst einmal des Hesse'schen Satzes bedienen. Zu diesem Ende haben wir die Gerade RM zum Schnitte zu bringen mit g' in E, sowie MS zu schneiden mit g in D. Alsdann umfahren wir das Viereck A, R, M, S in dieser Reihenfolge der Ecken; — AM, RS sind also Paare von Gegenecken. Gegenüberliegende Seiten sind $\begin{cases} AR \\ MS \end{cases}$ und ferner $\begin{cases} RM \\ AS \end{cases}$, erstere schneiden sich in D, letztere in E. Nach der Voraussetzung sind AM, RS conjugirt in Bezug auf K, *demnach geht die Polare des Punktes D durch E* (nach Hesse). Wäre daher auf g der Punkt D vorgegeben gewesen, statt R, so hätte man statt des Punktes S auf g' diesmal den Punkt E erhalten; d. h. rückt der Punkt R' in die Stelle S' auf AN, so rückt umgekehrt der bewegliche Punkt S' an die Stelle des früheren R'.

Aber man kann auch diesen Weg über den Hesse'schen Satz vermeiden und *direct* nach dem Principe von § 16, Anm. 1 die involutorische Lage der Punktreihen R' und S' beweisen.

Lässt man in Fig. 41 R' nach A rücken, so fällt auch R mit A zusammen, die Polare von R wird also zur unendlich fernen Geraden, die die Gerade g' in deren unendlich fernem Punkte trifft. Derselbe gibt, von der Richtung M aus projicirt, als Fusspunkt auf AN den unendlich fernen Punkt von AN. Demnach gehört zum Punkte A, betrachtet als Punkt R' der ersten Punktreihe, als entsprechender S' der unendlich ferne Punkt auf AN.

Lässt man aber S', den veränderlichen Punkt der *zweiten* Reihe, nach A rücken, wodurch auch S auf g' mit A zusammenfällt, so ergibt sich genau wie soeben als entsprechender Punkt der *ersten* Punktreihe diesmal wieder der unendlich ferne Punkt der Axe AN.

Demnach entsprechen sich auf dem Träger AN die beiden Punkte: — A einerseits, der unendlich ferne Punkt andrerseits — doppelt; daher liegen $R'S'$ in Involution. Insbesondere werden

A und jener unendlich ferne Punkt, als Punktepaar der Involution, harmonisch getrennt von den Doppelelementen der Involution; d. h. die Doppelpunkte der beiden involutorischen Punktreihen R' und S' auf AN liegen gleichweit entfernt von A.

Diese Doppelpunkte können (vgl. Fig. 11) demnach leicht construirt werden: man construirt einen Hilfskreis K'' über dem Durchmesser AS', der von der Senkrechten in R' in zwei Punkten geschnitten wird, durch die man nur einen Kreis mit dem Mittelpunkt A zu legen braucht, der dann auf AN die gesuchten Doppelpunkte ausschneidet; $\delta\delta'$ in Figur 41.

Wir wollen nun zeigen, dass die beiden Geraden ξ und η, welche wir durch δ und δ' senkrecht führen zur Axe AN, die Lösung unsrer Aufgabe bilden.

Wenn δ als Doppelpunkt der Involution $R'S'$ gefunden wurde, so bedeutet dies soviel: rückt der Punkt R' nach δ, so rückt auch S' nach δ. Mit andern Worten: construirt man zum Punkte r, dem Schnittpunkte von g und ξ, der also genau oberhalb δ gelegen ist auf g, die Polare, so geht dieselbe durch s, den Schnittpunkt von ξ mit g', weil dieser Punkt genau unterhalb δ gelegen auf g'.

Demnach sind die beiden Punkte r und s auf ξ conjugirt in Bezug auf K. Zugleich sind aber auch die Punkte δ und M auf ξ conjugirt in Bezug auf K. Beide Punktepaare aber, sowohl r und s, als auch δ und M, erscheinen von A aus unter rechtem Winkel. Zwei Involutionen auf demselben Träger sind aber identisch, wenn sie zwei Paare entsprechender Punkte gemein haben — demnach sind auf dem Träger ξ jene beiden Involutionen identisch, von welchen die erste ausgeschnitten wird von den rechtwinkligen Strahlenpaaren durch A, die andere die polare Punktinvolution bildet in Bezug auf K: „*alle* Punktepaare der Geraden ξ (oder η), welche ausgeschnitten werden durch je ein rechtwinkliges Strahlenpaar durch A, sind zugleich Paare conjugirter Punkte in Bezug auf K.“

Damit wäre die Aufgabe vollständig gelöst. Wir fassen die Vorschriften zur Construction nochmals zusammen: Gegeben K (Fig. 41); man construire durch den Mittelpunkt A

zwei zu einander senkrechte Gerade gg', nehme auf ersterer einen beliebigen Punkt R an, dessen Polare ϱ die Gerade g' treffe in S. Wird dann R und S projicirt auf eine Axe AN des Kegelschnitts in der Richtung der andern Axe, so erhält man zwei Fusspunkte $R'S'$ auf dieser Axe, welche entweder von A getrennt werden oder nicht.

Setzen wir einen Augenblick voraus, dass $R'S'$ von A *nicht* getrennt werde, so können wir einen Kreis K'' legen, der zu Endpunkten eines Durchmessers besitzt einmal A und dann jenen der beiden Punkte $R'S'$, welcher von A den grössern Abstand hat. Eine Senkrechte durch den andern der beiden Punkte trifft diesen Kreis sicher in reellen Punkten, durch welche man einen weiteren Kreis führt mit dem Mittelpunkt A, um zwei Schnittpunkte $\delta\delta'$ desselben mit AN zu erhalten. Die zwei Parallelen $\xi\eta$ durch $\delta\delta'$ zur Richtung AM sind jene Geraden, deren polare Punktinvolution in Bezug auf K von A aus durch Paare von zu einander senkrechten Strahlen projicirt wird.

Anm. Versagt diese Construction, weil A die Fusspunkte R' und S' *trennt*, dann vertausche man in obiger Vorschrift die Bezeichnungen M und N; *nunmehr* kann die Construction unmöglich mehr versagen.

Wegen des Beweises vergleiche man die früher aufgestellten Figuren 17 und 18, nach Umänderung der *dort* gegebenen Bezeichnung M und N in unser R und S. Wir können das früher zu diesen Figuren Bemerkte kurz wiederholen, indem wir sagen: wird ein rechtwinkliges Dreieck RAS betrachtet von zwei zu einander senkrechten Richtungen M und N aus, so muss es *einmal* dabei vorkommen, dass der Scheitel A die Eckpunkte RS zu trennen scheint, und *einmal*, dass er sie nicht zu trennen scheint.

Demnach hat unser Problem (in der metrischen Fassung dieses Paragraphen) unter allen Umständen *reelle* Lösungen und zwar *genau* von der Anzahl *zwei*.

Ist der Kegelschnitt K eine Hyperbel, so läuft die Richtung der reellen $\xi\eta$ parallel zur imaginären Axe (dass die Geraden $\xi\eta$ nicht parallel zur reellen Axe laufen können,

liegt auf der Hand, da ja jede Gerade, die parallel zur reellen Axe verläuft, die Curve *schneidet*).

Ist der Kegelschnitt K eine Ellipse, so läuft die Richtung der reellen $\xi\eta$ parallel zur grossen Axe. Ein strenger Beweis dieser Bemerkung kann hier in Kürze nicht gegeben werden.

Bei imaginärem K muss der *Versuch* entscheiden.

§ 19.

Zweite Lösung des Berührungsproblems mit Hilfe des Raumes.

Bereits bei der Discussion der ersten Lösung (§ 8) wurde die darstellende Geometrie für einige Momente herangezogen, damals nur, um uns über die Zahl der möglichen Lösungen (für reelle Bestimmungsstücke) und die Lage der vier Berührsehnen zu orientiren.

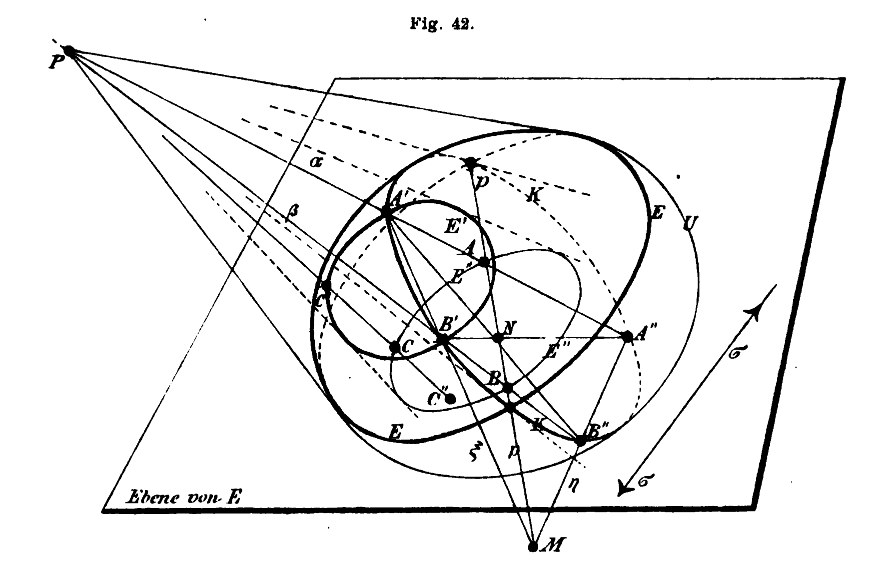
Der dort ausgesprochene Gedanke „die Bestimmung von Kegelschnitten in doppelter Berührung zurückzuführen auf die Bestimmung — mittelst darstellender Geometrie — von räumlichen Schnittcurven auf Flächen zweiter Ordnung" soll nunmehr hier weiter ausgeführt werden; es wird sich — mit Unterstützung durch die unmittelbar vorher gegebenen Sätze — beweisen lassen, dass die Figur (im Raume) der vollständigen Lösung für den Fall reeller Bestimmungsstücke Bestandtheile enthält, welche nicht verloren gehen beim Imaginärwerden von einigen der vorgegebenen Elemente.

Eine solche räumliche Figur findet sich, in perspectivischer Abbildung, vor als Nr. 42. In derselben ist die Bestimmung eines Kegelschnittes E'' durch drei reelle Punkte ABC und in doppelter Berührung mit der vorgegebenen Ellipse E durchgeführt worden in folgender Weise.

Durch den Kegelschnitt E wurde ein Ellipsoid U gelegt, P sei der Pol der Ebene von E in Bezug auf U. Die drei Verbindungslinien PA, PB, PC ergaben drei Paare von räumlichen Punkten auf dem Ellipsoid: $A'B'C'$, $A''B''C''$, erstere auf der oberen, letztere auf der unteren Hälfte der Fläche gelegen.

Um nun eine Lösung der Aufgabe zu geben, genügt es beispielsweise, durch $A'B'C'$ (vergl. die Figur) eine Ebene zu legen, welche die Fläche schneidet in einer Curve E', die

Fig. 42.



nur wiederum von P aus auf die Ebene von E projicirt zu werden braucht, E'', um in ihrer Projection E'' eine solche Lösung zu geben.

Man kann sich auch folgender Ausdrucksweise bedienen.

Nachdem vorgegeben ausser C noch das Punktepaar AB, construire man das Viereck jener Punkte $A'B'$, $A''B''$, in welchen von den Verbindungsgeraden PA, PB der Kegelschnitt K getroffen wird, der die Schnittcurve des Ellipsoids bildet mit der Ebene durch P und AB. Durch die räumliche Verbindungsgerade ξ von zweien dieser Eckpunkte, $A'B'$, sowie durch den Punkt C' lege man eine Ebene, die des Schnittes E' — den übrigen Theil der Constructionsvorschriften dann wieder wie vorhin ergänzend.

Diese neue Fassung der Lösung enthält aber nur Theile der Figur, die beim Imaginärwerden der Punkte AB auf dem Träger p *reell bleiben.*

Setzen wir AB als *imaginär* voraus, so werden zunächst in der Figur die beiden Geraden von P nach A und B ebenfalls imaginär; damit werden auch die vier Eckpunkte des Vierecks $A'B'A''B''$ sämmtlich imaginär, während übrigens K wiederum reell bleibt. Nach den Ergebnissen der vorhergehenden Paragraphen bleiben einige Bestandtheile der Figur des vollständigen Vierecks $A'B'A''B''$ doch reell, auch wenn die Ecken desselben es nicht mehr sind. Wir wissen, dass sowohl die Punkte M und N reell bleiben, als auch *ein* Paar der durch M und N gehenden Verbindungsgeraden; etwa ξ und η.

Eine solche Gerade, ξ, schneidet dann das Ellipsoid freilich nicht mehr in reellen Punkten $A'B'$, das ist aber auch zur weitern Ausführung der Construction gar nicht mehr nöthig. Sobald ξ reell bestimmt ist, kann man durch C' und ξ eine Ebene, E', legen; die Projection E'' der so erhaltenen Schnittcurve von P aus auf die Ebene von E löst die Aufgabe, wie früher.

Ehe wir die „Figur der reellen Lösungen“ verlassen, um die Lösungsvorschriften für imaginäre AB zusammenfassend zu geben, wollen wir noch einige Bemerkungen derselben entnehmen, die hier noch selbstverständlich und keines Beweises bedürftig erscheinen, später dagegen uns gute Dienste leisten sollen, wenn es sich darum handeln wird, den Nachweis für die aufzustellende Construction in aller Strenge zu erbringen.

Als wichtig erscheinen in der Figur (Nr. 42) drei Kegelschnitte E', K, E'', die unter sich, sowie mit den Punkten AB, folgenden Zusammenhang haben.

Die Ellipsen E' und K schneiden sich in den Punkten $A'B'$; je zwei Punkte der Verbindungsgeraden ξ, welche $A'B'$ harmonisch trennen, sind also sowohl für E' als auch für K polar conjugirt, auf ξ. Ferner: je zwei Strahlen durch P, welche, in der Ebene PAB, oder Pp, gelegen, die a priori vorgegebenen Strahlen $\alpha\beta$ (PA, PB) harmonisch trennen, treffen die Ebene von E' in zwei Punkten (auf ξ), welche in Bezug auf E' polar conjugirt sind, zugleich aber die Ebene

von E ebenfalls in zwei Punkten, welche in Bezug auf E'' conjugirt sind (weil ja E'' durch A und B geht). Alle diese Beziehungen sind, wie gesagt, direct der Figur zu entnehmen.

Wir drücken dasselbe nur ein wenig anders aus, wenn wir sagen: ist die Raumfigur als richtig gezeichnet vorausgesetzt, *ist* also E'' eine doppelt berührende Curve an E, als Projection vor E', so wird die Schnittlinie der Ebenen von K und E' in zwei für E' polar conjugirten Punkten getroffen von allen Strahlenpaaren durch P, welche in der Ebene Pp die vorgegebenen Strahlen $\alpha\beta$ harmonisch trennen.

Fällt die Gerade p zusammen mit der unendlich fernen Geraden der Ebene von E, ist ferner die vorgegebene elliptische Involution auf ihr die der rechten Winkel, so wird die Ebene K zunächst parallel zur Ebene von E; K wird ein Kegelschnitt, der mit E dieselben Punkte gemeinschaftlich hat auf p, d. h. ein mit E ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitt. Nach wie vor bleibt P für K der Pol von p, daher wird P zum Mittelpunkt von K; die beiden Geraden ξ und η bleiben, wie noch in Figur 42, Gerade, für welche die polare Involution in Bezug auf K identisch ist mit der von der elliptischen Strahleninvolution $P(\alpha\beta)$, der der rechten Winkel, auf ihnen ausgeschnittenen — *wir können sie demnach ohne Weiteres nach den Vorschriften der vorigen Paragraphen angeben.*

Ist ξ bestimmt auf der Ebene K, so kann man durch ξ und C', den Durchstosspunkt der Geraden PC mit der Fläche zweiter Ordnung, eine Ebene legen und hierauf entweder den Schnitt E' dieser Ebene herstellen und nach der Ebene von E projiciren, E'', — oder noch einfacher: man kann die Schnittgerade σ dieser Ebene $\xi C'$ bestimmen mit der Ebene des vorgegebenen Kegelschnitts E; sie ist die Berührsehne für eine der gesuchten Curven.

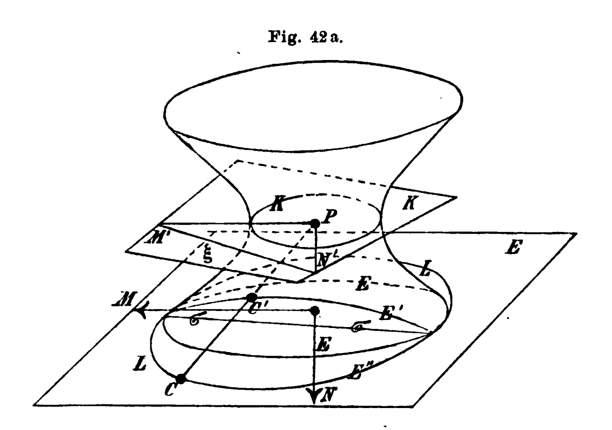
Eine Schwierigkeit kann nur noch erwachsen in der Auswahl von Flächen zweiter Ordnung, welche gerade für jede Combination der vorgegebenen Bestimmungsstücke einfaches Operiren gestatten.

I. Ist der vorgegebene Kegelschnitt eine Ellipse, C ausser-

halb, so lässt sich nunmehr unsre Methode mit Erfolg durchführen.

Construction. (Fig. 42a.) Gegeben in der Ebene E die Ellipse E, sowie C, ausserhalb. Man lege durch E ein einmanteliges Hyperboloid, bestimme den Pol P der Ebene E und lege die Ebene K*) parallel zu E; P wird hierbei von

Fig. 42a.



selbst zum Mittelpunkt der Schnittcurve K dieser Parallelebene. In der Ebene von K construire man eine Gerade ξ so, dass ihre in Bezug auf K conjugirten Punktepaare rechtwinklig erscheinen von P aus.

Hierauf lege man eine Ebene E' durch ξ, sowie jenen Punkt C' des Hyperboloids, wo dasselbe durchstossen wird von der räumlichen Verbindungsgeraden PC; diese Ebene trifft E in einer Geraden σ, „der Berührsehne eines *Kreises* L, der, durch C gehend, die vorgegebene Ellipse E doppelt berührt.“

Beweis. (Fig. 42a.) Die beiden Curven E' und E'' liegen auf demselben Kegel, Scheitel P. Wird daher in der Ebene K ein Strahlenpaar durch P geführt, welches ξ, die Schnittgerade der Ebenen E' und K, in zwei für E' con-

*) Durchweg wurde in obigem Texte *ein* Buchstabe, K, E, verwendet, sowohl um eine Ebene, als eine in ihr gegebene Curve zu bezeichnen.

jugirten Punkten trifft, so trifft dasselbe Strahlenpaar die Schnittgerade der Ebenen E'' und K in zwei für E'' conjugirten Punkten.

Ferner: die Involution der Geraden $\mathfrak{x}$ für die beiden Kegelschnitte K und E' ist identisch — denn beide Kegelschnitte gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an, haben daher die imaginären Schnittpunkte gemeinschaftlich, in welchen diese Fläche getroffen wird von der Schnittgeraden $\mathfrak{x}$ von ihren beiden Ebenen. Daher: trifft ein Strahlenpaar durch P die Gerade $\mathfrak{x}$ in zwei Punkten, welche in Bezug auf K polar conjugirt sind, so sind diese beiden Punkte auf $\mathfrak{x}$ immer auch conjugirt in Bezug auf E'. Indem wir die beiden letzten Schlüsse zusammenfassen, können wir E' eliminiren und sagen:

ein Strahlenpaar durch P, welches $\mathfrak{x}$ in zwei conjugirten Punkten trifft in Bezug auf K, trifft immer die unendlich ferne Gerade der Ebene E'' in zwei Punkten, welche in Bezug auf E'' conjugirt sind. Irgend ein rechtwinkliges Strahlenpaar durch P hat aber — nach unsern Voraussetzungen über $\mathfrak{x}$ — die Eigenschaft, $\mathfrak{x}$ in zwei Punkten zu treffen, welche in Bezug auf K conjugirt sind.

Nunmehr können wir auch K eliminiren und sagen: irgend ein rechtwinkliges Strahlenpaar durch P in der Parallelebene zu E trifft die unendlich ferne Gerade der Ebene E'' (E) in zwei Punkten, welche in Bezug auf E'' conjugirt sind. Solche unendlich ferne Punkte einer Ebene E'' aber, die erhalten werden als Schnittpunkte eines mit E'' parallel liegenden rechtwinkligen Strahlenbüschels P mit der unendlich fernen Geraden von E'', erscheinen eben wieder in dieser Ebene E'' als rechtwinklig aufeinanderstehende *Richtungen*. Daher: je zwei senkrecht aufeinander stehende Richtungen (unendlich ferne Punkte) der Ebene E'' sind in Bezug auf den Kegelschnitt E'' conjugirt.

Daher ist letzterer ein Kreis, was zu beweisen war. Dass derselbe E doppelt berührt, folgt einmal daraus, dass P nach der Voraussetzung der Pol der Ebene E in Bezug auf das Hyperboloid; dann daraus, dass E'' die Projection auf E bildet

(von P aus) einer auf dem Hyperboloide verlaufenden ebenen Curve E'. Dass E'' durch C geht, ist eine *Voraussetzung* der Construction.

§ 20.

Man kann den Beweis auch umgekehrt führen.

Vorausgesetzt E'' sei ein Kreis und die Projection einer ebenen Schnittcurve E' des Hyperboloids; vorausgesetzt ferner K parallel mit E, sowie P der Pol von E, — so kann man beweisen, dass je zwei conjugirte Punkte in Bezug auf K auf der Schnittgeraden ξ der Ebenen K und E' von P aus unter rechtem Winkel erscheinen.

Wir übergehen den Nachweis dieser Bemerkung, der dem Leser nicht mehr schwer fallen wird, um weitere Combinationen der vorgegebenen Bestimmungsstücke zu erledigen.

II. Ist vorgegeben eine Ellipse E, zugleich C innerhalb, so ist kein Hyperboloid mehr anwendbar, weil dann die Gerade PC die Fläche nicht mehr treffen würde.

Hier wählt man ein *Ellipsoid* durch E. Der Schnitt der Parallelebene K mit dem Ellipsoid fällt dann *imaginär* aus, sodass die zur Erledigung des Problems führenden Constructionen nicht mehr übersichtlich bleiben. Es wäre dann, durch darstellende Geometrie, das Polarsystem der Parallelebene K in Bezug auf das Ellipsoid herzustellen — dasselbe würde die Geraden ξ und η liefern —, der Schluss der Construction wäre Früherem gänzlich analog.

Immerhin ist in diesem Falle die zweite Lösungsmethode, als besonders einfach, weitaus vorzuziehen — will man nicht auf die erste, allgemein giltige, zurückgreifen.

III. Ist vorgegeben eine Hyperbel H, C innerhalb, so lege man durch H *ein zweimanteliges Hyperboloid.*

IV. Ist vorgegeben eine Hyperbel H, C ausserhalb, so lege man diesmal durch H ein *einmanteliges Hyperboloid.*

Warum gerade nur diese Vorschriften zum Ziele führen, — die geometrische Anschauung vermag den deutlichsten Beweis dafür zu liefern. Immer wird es sich darum handeln

sich zu vergewissern, dass die Verbindungsgerade PC die Fläche *reell* trifft, wenn P als Pol von H gedacht wird.

V. Imaginäres. Im Anschluss an die Methoden des § 18 kann leicht folgende Aufgabe gelöst werden:

„Durch den Mittelpunkt eines Kreises gehen zwei Geradenpaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ (beide reell und einander trennend), man soll eine Gerade ξ so angeben, dass je zwei Punkte derselben, welche von conjugirten Strahlen der Strahlinvolution $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ausgeschnitten werden, conjugirt sind in Bezug auf den Kreis."

Indem die Lösung als nach dem Vorhergehenden gegeben angesehen wird, schreiten wir mit Hilfe dieser Aufgabe zur Erledigung des Problems (vergl. den Eingang), in welchem — in einer besondern Specialisirung unsrer Hauptaufgabe — verlangt wird „ein Kreiskegel durch drei gegebene Punkte, wovon zwei imaginär".

Eine erste Lösung dieses speciellen Problems ist bereits im ersten Abschnitte enthalten; die nunmehr mitgetheilte soll sich genau den Methoden dieses dritten Abschnittes anschliessen — sie ermöglicht es insbesondere die Schlussweisen, die wir in diesen letzten Betrachtungen angewandt haben, uns nochmals zu vergegenwärtigen.

Es sei (Fig. 43) eine Kugel vorgegeben mit dem Mittelpunkt P, sowie eine Gerade PC durch P, ferner eine Ebene K, welche die beiden einander trennenden Geradenpaare durch P: $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ enthält; gesucht ein Kreiskegel, welcher, mit P als Scheitel, die Gerade PC enthält, während zugleich die Geradenpaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ für denselben conjugirt sind.

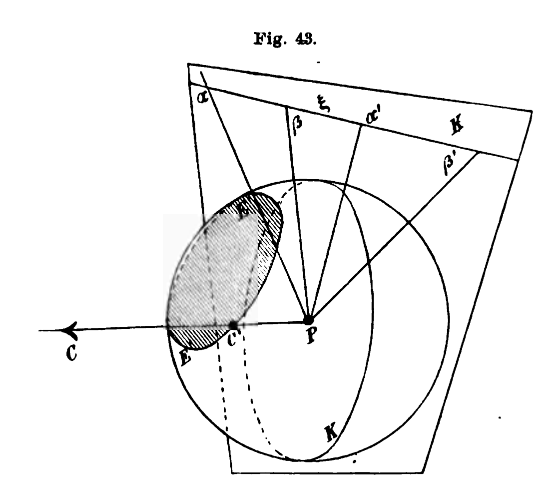
Hier suchen wir in der Ebene K eine Gerade ξ, für welche je zwei in Bezug auf die Kugel (den grössten Kugelkreis in der Ebene K) conjugirte Punkte von P aus als Strahlenpaare der durch $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ definirten Involution projicirt werden, und schneiden die Kugel mit einer durch ξ und den Punkt C' gelegten Ebene, wobei C' die Stelle, wo die Gerade PC die Kugel durchdringt; E' sei die so erhaltene Schnittcurve.

Dass dann der Kreiskegel mit dem Scheitel P, der durch

die zuletzt erhaltene Schnittcurve E' geht, eine Lösung des Problems gibt, ist direct der Figur zu entnehmen.

Denn es hat die ebene Curve E' auf der Geraden ξ dieselbe polare Involution, wie der grösste Kugelkreis, den die

Fig. 43.



Ebene K durch P auf der Kugel ausschneidet — zwei ebene Curven auf einer Fläche zweiter Ordnung haben offenbar die Involution der Raumgeraden gemeinschaftlich, auf welcher sich ihre Ebenen schneiden.

Nun ist aber nach der Construction die Involution jenes grössten Kreises auf ξ identisch mit der von $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ bestimmten Involution; daher gilt dasselbe von der Involution des Schnittes E' und jedes durch E' gelegten Kegels. Verlegt man den Mittelpunkt eines solchen nach P, so wird derselbe speciell ein Kreiskegel, wie es die Aufgabe verlangt.

Wir sind am Ende unsrer Untersuchungen angelangt. Im ersten Abschnitte wurden Lösungsmethoden mitgetheilt, die für alle Specialisirungen unsres allgemeinen Problems, für alle Combinationen der vorgegebenen Bestimmungsstücke gleiche Wirksamkeit besitzen. Von den beiden nachfolgenden Abschnitten kann nicht dasselbe gesagt werden; nur im Falle, wo der vorgelegte Kegelschnitt eine Hyperbel, können beide

Methoden unbedenklich in Betracht gezogen werden, einerlei, ob der vorgegebene dritte, reelle, Punkt ausserhalb, oder innerhalb der Curve gelegen.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so empfiehlt sich die $\begin{cases}\text{zweite}\\\text{dritte}\end{cases}$ Methode in jenem Falle, wo der vorgegebene Punkt $\begin{cases}\text{innerhalb}\\\text{ausserhalb}\end{cases}$ der Curve gelegen; ist der Kegelschnitt imaginär, so führt wiederum die dritte Methode rasch zum Ziele.

Vierter Abschnitt (Anhang):

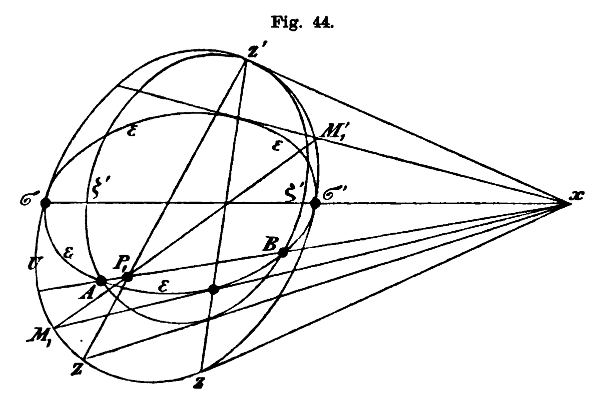
Kegelschnitte in vierpunktiger Berührung.

§ 21.

Ueber eine gewisse Involution höherer Ordnung.

Sind zwei Punkte AB innerhalb eines Kegelschitts vorgegeben (Fig. 44), so liefert jede Gerade durch den — richtig zu bestimmenden — Punkt x die Berührsehne für einen durch AB doppelt berührend gelegten Kegelschnitt; man kann aber auch durch x diese Gerade so ziehen, dass sie den vorgegebenen Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten trifft.

Fig. 44.



Sei z' ein solcher Berührpunkt der von x ausgehenden Tangente, so kann durch ABz' ein Kegelschnitt gelegt werden, der den vorgegebenen vierpunktig berührt (vgl. das in § 14, I bei Aufstellung des Krümmungskreises Gesagte).

Nicht jeder durch ABz' gelegte Kegelschnitt, der überhaupt nur die Gerade xz' in z' berührt, ist ein solcher, vierpunktig berührender; aber in dieser Schaar von möglichen Kegelschnitten gibt es *einen* (ebenso wie für z), welcher durch

AB gehend, vierpunktig berührt; und durch keine andern Punkte als z und z' sind solche möglich.

Die thatsächliche Construction jener beiden Kegelschnitte kann der *darstellenden Geometrie* übertragen werden; — indem ein solcher Kegelschnitt das Bild ist einer durch den Schnitt der Ebene im Raume ABz' mit dem Ellipsoid hervorgebrachten Raumcurve.

Einstweilen entnehmen wir dem Gesagten als bisher gewonnenes Resultat: „die Aufgabe der Bestimmung der vierpunktigen Kegelschnitte durch zwei, beide im Innern oder ausserhalb eines Kegelschnitts gelegene, Punkte hat zwei reelle Lösungen“.*)

Aber es gibt auch Constructionen, die nur in der Ebene der Zeichnung operiren, für die Lösung derselben Aufgabe. — Um die vollständige Lösung herzustellen, bleibt uns allerdings nicht erspart, wieder einmal etwas weit auszuholen, indem wir zunächst einige Hilfssätze ableiten, die zum Theil in Gebiete der synthetischen Geometrie von nicht mehr ganz elementarem Charakter führen.

Es sei gezeichnet ein Kegelschnitt $\varkappa$, sowie die Polare a eines ausserhalb liegenden Punktes A (Fig. 45).

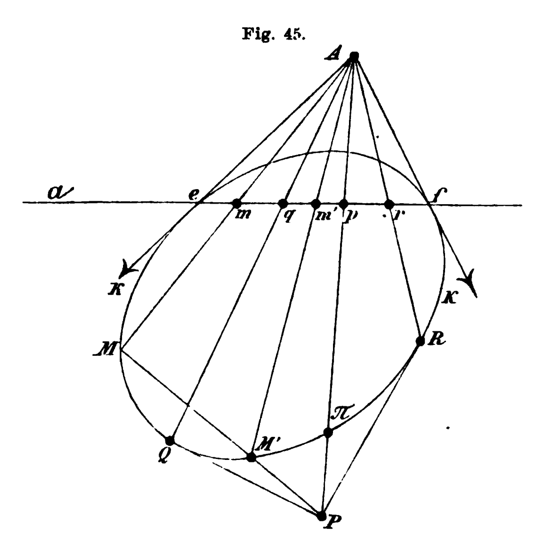
Es sei weiter ein Punkt P ausserhalb $\varkappa$ beliebig, aber dann für's Folgende fest angenommen; durch denselben seien alle möglichen Geraden PMM' gezogen, welche immer $\varkappa$ in zwei Punkten MM' treffen, welch' letztere von A aus auf a projicirt die Punkte m und m' ergeben.

Verfolgen wir die gegenseitigen Beziehungen etwas genauer, wie sie für die beiden Punktreihen mm' auf a sich einstellen. Zunächst sei bemerkt, dass die Bewegungen der Punkte mm' *nicht* zu einander projectivisch sind. Denn nach bekannten Sätzen der Polarentheorie ist die Bewegung von M' und M projectivisch, betrachtet von einem Punkt des Kegelschnitts $\varkappa$ aus, *aber auch nur dann;* sie ist es eben nicht mehr, wenn M und M' betrachtet werden von einem nicht auf $\varkappa$ gelege-

*) Dies gilt zunächst ausdrücklich unter der Annahme von *reellen* Punkten AB.

nen Punkte A. Das bedeutet: die beiden Strahlbüschel durch A, welche M und M' mit A verbinden, sind *nicht* projectivisch auf einander bezogen, demnach auch nicht die Punkte m und m' auf a. Aber es ist doch Mancherlei zu bemerken, was an

Fig. 45.



die an Kegelschnitten gewöhnlich studirten Involutionen von Punktepaaren auf einer Geraden erinnern muss. Vor Allem haben wir wirklich das Recht, von einer „Involution" der Punkte m und m' in dem Sinne zu sprechen, dass immer dem Punkte m', wird derselbe als Element der ersten (nicht accentuirten) Punktreihe m betrachtet und dort etwa mit s bezeichnet, wieder ein Element s' der zweiten (accentuirten) Punktreihe entspricht, das mit dem früheren m zusammenfällt; dies folgt eben aus den oben gegebenen Constructionsvorschriften für die Punkte m und m' — denn die Gerade PMM' bleibt immer dieselbe, ob man nun zur Construction ausging von P und einem Punkte M, oder von P und (dem auf PM gelegenen) M'.

Auch Doppelelemente sind vorhanden und zwar in der Zahl drei. Legen wir die bewegliche Gerade PMM' durch A, so erhalten wir auf a nur einen einzigen sich selbst entsprechenden Punkt p. Desgleichen liefern die Berührpunkte Q und R der von P aus möglichen Tangenten an $\varkappa$ zusammen-

fallende Punkte M und M', die also auch zusammenfallende Projectionen q, resp. r, auf a ergeben*).

Rückt der Punkt P ins Innere von $\varkappa$, so werden letztere beiden Doppelelemente unsichtbar; doch ist das gar nicht wesentlich und kein Hinderniss, allgemein den Satz auszusprechen: „alle durch den Punkt P möglichen Geraden liefern durch Schnittpunktepaare MM' auf dem festen Kegelschnitte $\varkappa$, welch' letzteren Schnittpunkte wieder von einem Punkte A aus auf die Polare a desselben projicirt werden, zwei in einer ‚Involution höherer Ordnung' liegende Punktreihen mm', welche Doppelpunkte in der Anzahl drei besitzen".

Natürlich ist es dasselbe, wenn man sagt: „Construirt man Gerade PMM' durch einen festen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts $\varkappa$ und betrachtet die Punktepaare MM' von einem in der Ebene des Kegelschnitts gelegenen Augpunkt A aus, so scheinen die Schnittpunktepaare MM' zwei Strahlbüscheln anzugehören, die in einer nicht projectivischen, drei Doppelelemente besitzenden, Involution liegen."

§ 22.

Aus der Theorie der Collineation.

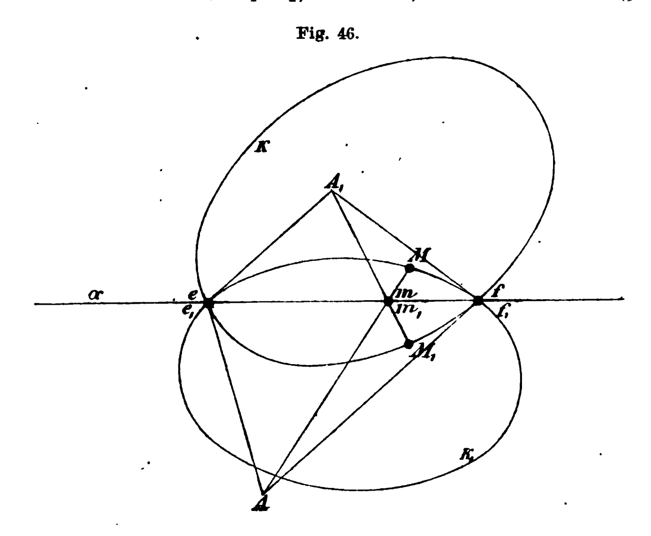
Lehrsatz. I. Es seien zwei ebene Systeme gegeben: einerseits das der Punkte $A \ldots m \ldots$, andrerseits das der Punkte $A_1 \ldots m_1 \ldots$ Es seien ferner durch zwei gewisse Punkte ef einer Geraden α zwei Kegelschnitte $\varkappa$, $\varkappa_1$ gezeichnet; A und A_1 seien die Pole von α in Bezug auf $\varkappa$ resp. $\varkappa_1$. Dann sind die beiden Systeme collinear auf einander bezogen, wenn zu jedem Punkte M des Kegelschnitts $\varkappa$, der auf der Verbindungslinie Am liegt, als entsprechender derjenige gerechnet wird, der auf $\varkappa_1$ sich bestimmt durch den Schnittpunkt der Geraden $A_1 m_1$ mit $\varkappa_1$; — wobei aber noch betreffs der Punkte der Geraden α selbst die Annahme gemacht wird, dass an jeder Stelle derselben zwei

*) Bei analytischer Untersuchung dieser Verhältnisse ergiebt sich, dass diese Art Involution eigentlich sogar vier Doppelpunkte besitzt; in p sind zwei derselben vereinigt.

entsprechende Punkte mm_1 vereinigt liegen, dass also α die Collineationsaxe der beiden Systeme bilde.

Beweis (Fig. 46). Zwei ebene Systeme sind collinear auf einander bezogen, wenn beide Systeme eine Gerade α als Ort sich selbst entsprechender Doppelelemente aufweisen, und ausserdem noch einem Punktepaar, Punkt A und M, des einen Systems, ein eben solches, Punkt A_1 und M_1 des zweiten Systems zugewiesen ist. Denn diese Bestimmungen genügen zur Herstellung der collinearen Beziehung — zu beweisen haben wir also, dass die Kegelschnitte $\varkappa\varkappa_1$ diese bereits durch die vier Punkte AM, A_1M_1, sowie α, fixirte Beziehung nicht

Fig. 46.



stören; indem man sie in der oben angegebenen Weise zur Herstellung von einander zugeordneten Punktepaaren benutzt.

Der Kegelschnitt $\varkappa$ wurde nun im ersten Systeme erhalten als bestimmt durch ein Tangentenpaar (Ae, Af) mit den Berührpunkten ef, sowie einen Punkt auf ihm, M; es gibt aber nur einen einzigen Kegelschnitt, der diese fünf Bestimmungsstücke hat. — Construirt man aber auf Grund der soeben hergestellten collinearen Beziehung (α sich selbst entsprechend, ferner A_1 und M_1 entsprechend den A und M) punktweise das Bild dieser Curve $\varkappa$ des erstens Systems für

das zweite System, so erhält man wieder einen Kegelschnitt, der diesmal die Geraden $A_1 e_1$ und $A_1 f_1$ berührt in e_1, resp. f_1 und durch M_1 geht; also zusammenfallen muss mit dem a priori gezeichneten Kegelschnitt $\varkappa_1$, der dieselben fünf Bestimmungsstücke aufweist. Demnach fügen sich die Punkte der Kegelschnitte in die durch α, AM, $A_1 M_1$, definirte collineare Beziehung der beiden Systeme.

Jedem Punkte M des Kegelschnitts $\varkappa$ im ersten Systeme entspricht ein gewisser Punkt M_1 (auf $\varkappa_1$) des zweiten Systems. Zieht man nun Am im ersten Systeme, so entspricht $A_1 m_1$ im zweiten Systeme; dem Punkte M, dem Schnittpunkte von $\varkappa$ und der Geraden Am entspricht also M_1 als Schnittpunkt von $A_1 m_1$ und $\varkappa_1$. Diese Art der Zuweisung ist nun gerade, wie sie unser Satz I aufstellte; sie ist also als zulässig erwiesen.

Als Resultat des soeben Gesagten ist nun auszusprechen (als Anwendung der überhaupt allen Collineationen zukommenden Haupteigenschaft): „werden im ersten Systeme, dem des Kegelschnittes $\varkappa$, Constructionen ausgeführt, die auf eine Figur von gewissen Eigenschaften führen, so werden die analog mit den entsprechenden Elementen im zweiten Systeme, ausgeführten Operationen auf eine Figur führen, die genau dieselben (projectivischen) Eigenschaften besitzt.

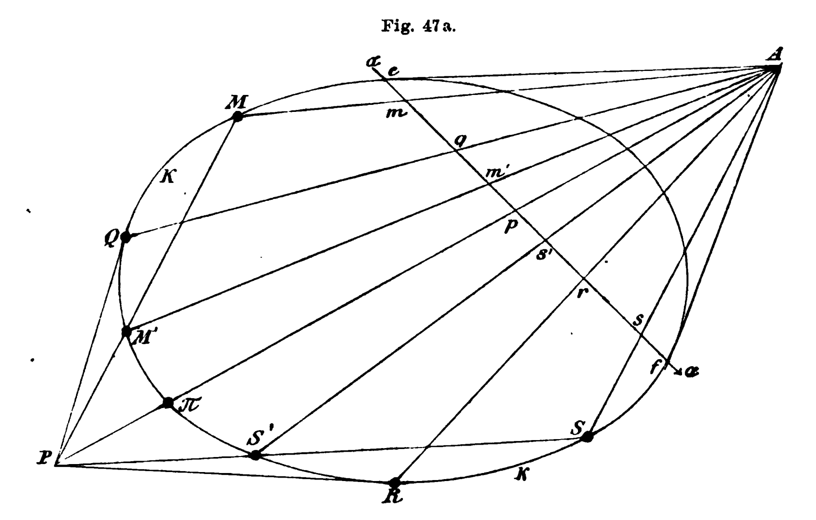
II. Wir gewinnen so folgenden Satz: „es sei ein Träger α vorgegeben und ein Kegelschnitt $\varkappa$ gezeichnet, für welchen der Pol der Geraden α bestimmt wird als der Punkt A (Fig. 47 a).

Es seien ferner auf der Geraden α Punktepaare vorgegeben mm', ss' ... (auch drei besonders markirte Punkte pqr) von folgender Eigenschaft: ‚construirt man nach Anleitung der Figur Gerade durch A und die vorgegebenen Punktepaare, wonach man erhält (auf $\varkappa$) MM', SS' ... π, Q, R, so schneiden sich die Geraden MM', SS' ..., Ap und die Tangenten in Q und R an $\varkappa$ alle in einem und demselben Punkte P.'

Wird dann durch die Punkte ef ein neuer Kegelschnitt $\varkappa_1$ *ganz beliebig* gelegt, für welchen ein anderer Punkt der Ebene Pol der Geraden α wird, A_1, wird für diesen neuen Kegel-

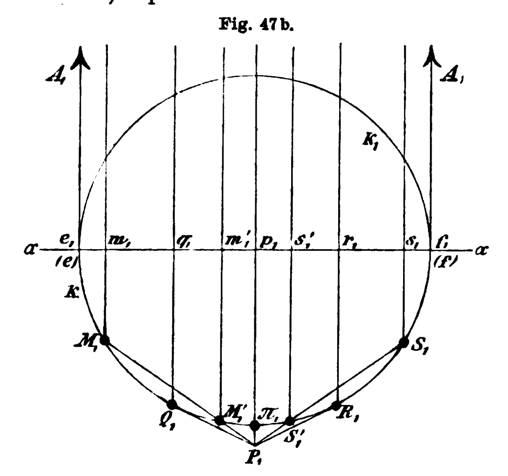
schnitt $\varkappa_1$ dieselbe Construction wiederholt, indem die Punkte mm', ss', ... p, q, r von A_1 aus auf $\varkappa_1$ projicirt werden, so

Fig. 47 a.



gehen auch für den neuen Kegelschnitt $\varkappa_1$ schliesslich $M_1 M_1'$, $S_1 S_1'$, ... $A_1 p_1$ und die Tangenten in Q_1 und R_1 an $\varkappa_1$ alle durch einen Punkt, P_1.“

Fig. 47 b.



Um diese Verhältnisse an einer Figur zu erläutern, wurde auch Fig. 47 b entworfen, welche die Gerade α mit denselben

Punkten auf ihr aufweist, wie die Figur 47a. (Wir hätten auch die Figur 47b in die Figur 47a hinein zeichnen können, was nur unterblieb um 47a nicht durch allzuviel Linienhäufung zu verwirren.)

Es zeigt sich deutlich, wie auch für die neue Figur, die einen neuen, durch $e_1 f_1$ ganz beliebig geführten, Kegelschnitt $\varkappa_1$ aufweist, ein solcher gemeinschaftlicher Schnittpunkt, P_1, existirt.

Zum Beweise beziehen wir die beiden ebenen Systeme von Fig. 47a und 47b derart aufeinander, dass wir die Punkte der Geraden α sich selbst entsprechen lassen und dem Pole A einerseits den Pol A_1 andererseits zuordnen mit der weitern Vorschrift: zwei Punkte MM_1 der beiden Kegelschnitte $\varkappa$, $\varkappa_1$ dann entsprechende zu nennen, wenn sich die beiden Geraden AM, $A_1 M_1$ in einem Punkte von α treffen.

Nach dieser Vorschrift sind die beiden ebenen Systeme collinear aufeinander bezogen (I); dem *einen* Punkte P in der ersten Figur entspricht also wieder *ein* Punkt P_1 des zweiten Systems.

§ 23.

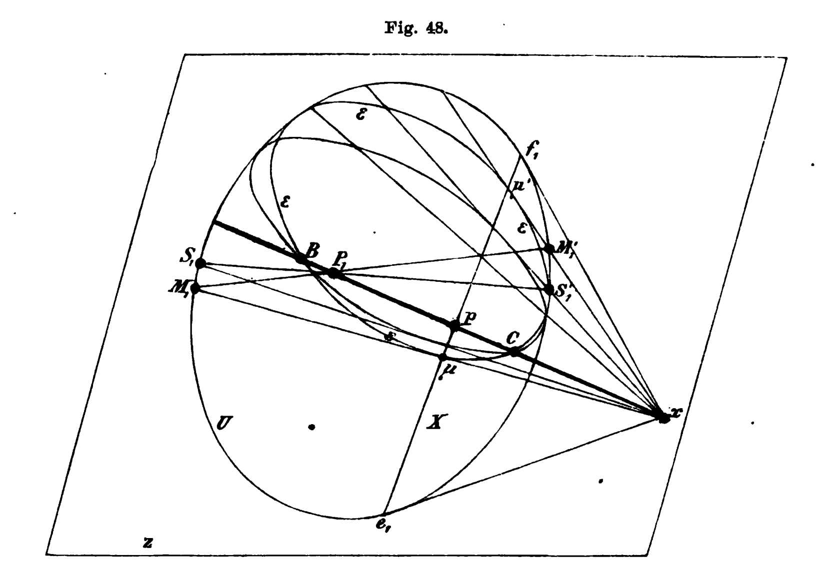
Wir kehren nun zur Figur 44 des § 21 zurück, wie sie uns Figur 48 in etwas veränderter Form zeigt, um durch einfache Projectionsmethoden den Satz zu erkennen, der das Problem der Bestimmung unsrer vierpunktig berührenden Kegelschnitte übersichtlich zu lösen gestattet.

(Wir arbeiten auf folgenden Satz hin [Fig. 48]: Zieht man vom fest bestimmten Punkt x aus, dem Schnittpunkt der Berührsehnen aller doppelt berührenden Kegelschnitte einer Schaar, die Tangenten an alle diese Kegelschnitte — welche Tangenten schliesslich den vorgegebenen Kegelschnitt in Punkten $M_1 M_1'$ treffen — so gehen die Verbindungslinien $M_1 M_1'$ durch einen festen Punkt P_1 auf der Verbindungslinie der vorgegebenen Punkte BC.)

Zunächst müssen wir von den Berührpunkten $\mu\mu'$ sprechen, die auf den Tangenten von x an die doppeltberührenden Kegelschnitte durch B und C liegen. Wird die Umfangscurve U

als Bild eines plastisch zu denkenden Ellipsoids aufgefasst, welches betrachtet wird vom Augpunkt A aus derart, dass die Polarebene des letzteren zusammenfällt mit der Zeichnungsebene, in welcher x gelegen, so geht im Raume die Polarebene des Punktes x wiederum durch den Augpunkt und erscheint also von letzterem aus als Gerade X. Alle die Punkte, in welchen die (räumlichen) Tangenten durch x das Ellipsoid berühren, liegen nun auf dieser Ebene, erscheinen also von A aus als einer Geraden X angehörig. Um im

Fig. 48.

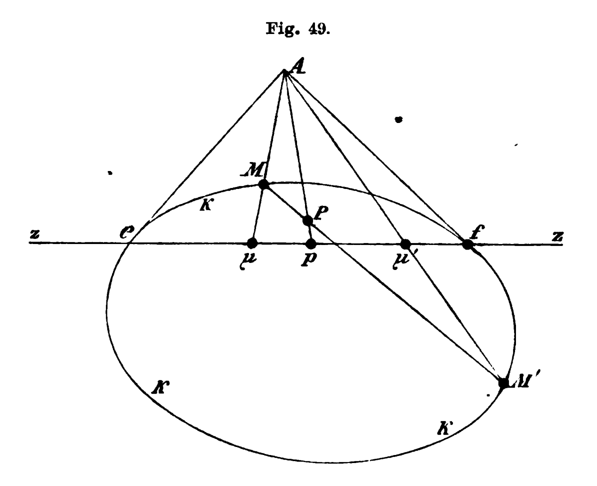


Raume solche Berührpunkte zu erhalten, kann man Ebenen durch x legen, welche das Ellipsoid in Kegelschnitten schneiden, und dann (im Raume) die Berührpunkte der Tangenten von x aus an diese Kegelschnitte suchen. (In der Figur sind solche Kegelschnitte gezeichnet.) Die im *Raume* gelegenen Tangenten von x aus an den Kegelschnitt der Ebene ε können dem Auge niemals anders erscheinen, als auch in der Projection vom Auge aus das *Bild* der räumlichen Curven berührend. Daher schliesslich zusammenfassend: alle Berührpunkte der Tangenten von x an alle doppelt berührenden

Kegelschnitte durch zwei feste Punkte BC liegen auf der festen Geraden X, der Polaren des Punktes x in Bezug auf die Umfangscurve U.

Das sind Dinge, die bereits früher in ähnlicher Form da waren (§ 4); aber gegenwärtig werden wir das Bild uns noch weiter auszumalen und in der Figur aufzusuchen haben, wie es uns die Vorstellung jener Operation im Raume erzeugen muss, nach welcher alle möglichen Ebenen durch eine feste Raumgerade BC zum Schnitt gebracht werden mit einem Ellipsoid, — in etwas werden wir auch jene Curve $\varkappa$ heranzuziehen haben, die den Schnitt vorstellt der Polarebene X mit der Curve U. Das Bild dieser Schnittcurve erscheint in der Figur 48 noch verkürzt zu dem von der Umfangscurve U abgeschnittenen Theile $e_1 f_1$ der Geraden X. Um uns diese Schnittcurve auf der *Ebene* X sichtbar zu machen, müssen wir das Ellipsoid von einem andern Punkte aus als A betrachten, etwa vom Punkte x aus. Wir erhalten dann das folgende Bild (Fig. 49): die frühere Zeichnungsebene erscheint als

Fig. 49.



Gerade z, welche die Polare bildet in der neuen Figur für den Augpunkt A (in Bezug auf die nun als Kegelschnitt sichtbar werdende Curve $\varkappa$). Die Gerade BC, die ja durch x ging, erscheint verkürzt zu einem Punkte P — *und die Raum-*

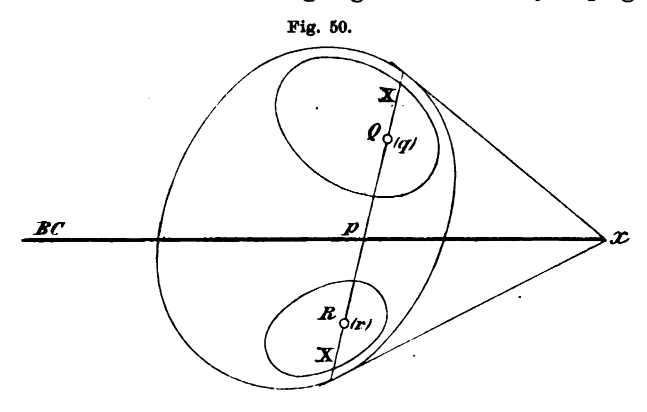
ebenen ε, welche sämmtlich durch BC gingen, erscheinen verkürzt zu Strecken MM' von Geraden durch P.

Bewegt sich nun die Gerade MPM' um den festen Punkt P, so schneidet sie in jeder Lage die Curve $\varkappa$ in einem Punktepaare MM', und letzteres erscheint dem Auge in A als an Stellen $\mu\mu'$ liegend, wo die Strahlen von A nach MM' durch die Zeichnungsebene hindurchgehen.

Die gegenseitige Lage (metrische Entfernung) all' der Punkte $\mu\mu'$ ist auf den beiden (congruenten) Strecken e_1f_1, und ef der beiden Figuren vollständig dieselbe. — Demnach hat man den Satz: „die Berührpunkte $\mu\mu'$ für die Tangenten von x an alle doppelt berührenden Kegelschnitte ε durch zwei feste Punkte BC scheinen, von A aus betrachtet, einer Geraden X anzugehören und bilden auf letzterer ein System von Punktepaaren $\mu\mu'$, die in Involution *(von der Art des § 21)* liegen."

(Man denke sich — um wieder auf die für diese Involution charakteristische Zahl *drei* zu gelangen — einen Augenblick die Gerade BC *ausserhalb* des Ellipsoids verlaufend, so dass also von ihr aus zwei Tangentialebenen möglich sind an das Ellipsoid, die je in einem Punkte Q, R das Ellipsoid berühren. Diese im Raume gelegenen Punkte QR [Fig. 50]

Fig. 50.



scheinen vom Augpunkt aus betrachtet auf X zu liegen und sind Repräsentanten von zwei in Punkte ausgearteten doppelt berührenden Kegelschnitten. Die beiden Berührpunkte der

Tangenten an solche Kegelschnitte von x aus fallen in einen einzigen Punkt zusammen, q, r; wir hätten demnach bereits zwei Doppelpunkte unserer „Involution höherer Ordnung" $\mu\mu'$ gefunden: die Bilder qr der räumlichen Berührpunkte der Tangentialebenen an das Ellipsoid durch die Raumgerade BC.

Aber auch der Kegelschnitt durch BC, welcher in der Ebene durch den Augpunkt und die Gerade BC verläuft, liefert — obwohl in räumlichen Beziehungen gar nicht ausgezeichnet vor den übrigen Kegelschnitten seiner Schaar —, doch immerhin für das Auge das besondere Bild eines in eine Strecke ausartenden Kegelschnittes, nämlich in jene Strecke der Geraden xBC, welche innerhalb U liegt. Diese Strecke schneide die Gerade X in p — dann ist auch p als ein Doppelelement der Involution ersichtlich.)

Diese Punktepaare $\mu\mu'$ haben aber nach den Sätzen des § 22 die folgende Eigenschaft.

Man lege einen beliebigen Kegelschnitt $\varkappa_1$ durch die Endpunkte $e_1 f_1$ ihres Trägers, bestimme ferner einen Punkt x als Pol dieses Trägers in Bezug auf $\varkappa_1$: dann braucht man nur für die neue Figur die Construction rückwärts zu wiederholen, welche dieselben Punktepaare in einer früheren Figur lieferte — um den gemeinschaftlichen Schnittpunkt P_1 aller Verbindungslinien $M_1 M_1'$ auftreten zu sehen.

Um diesen Gedanken auszuführen, wird man nun wieder zur Figur 48 zurückkehren, die ja schon ohne Weiteres Alles aufweist, was wir an Bestimmungsstücken für jene „rückwärts arbeitende" Construction brauchen: wir haben die Strecke $e_1 f_1$ und auf derselben die Punktepaare $\mu\mu'$ (sowie das Doppelelement p, Alles in congruenter Lage zur Figur 49); wir können demnach einen Kegelschnitt $\varkappa_1$ durch die Endpunkte $e_1 f_1$ führen und unbedenklich voraussagen, „dass für ihn ein gemeinschaftlicher Schnittpunkt P_1 der Verbindungsgeraden $M_1 M_1'$ existirt, wenn wir von den $\mu\mu'$ der Figur 48 ausgehend die Punkte $M_1 M_1'$ durch Umkehrung jener Operation finden, welche in Figur 49 von den MM' auf die $\mu\mu'$ führte."

Als Kegelschnitt, der durch die festen Punkte $e_1 f_1$ gelegt werden soll, nehmen wir ohne Weiteres die Umfangscurve U;

für sie ist x der Pol des Trägers X. Führen wir nun durch x die Strahlenpaare nach den Punkten $\mu\mu'$, welche die Curve treffen in $M_1 M_1'$, so haben wir eine zu Figur 49 collineare Figur vor uns (§ 22, I) und müssen demnach behaupten (§ 22, II), dass die Verbindungslinie aller Punktepaare $M_1 M_1'$ ebensogut durch einen festen Punkt P_1 (auf xp) gehen, wie umgekehrt früher (Fig. 49) die Punkte $\mu\mu'$ erhalten wurden durch Constructionen von beliebigen Geraden MPM' durch einen festen Punkt P (auf Ap).

„Liegt demnach ein einziger doppelt berührender Kegelschnitt ε durch die festen Punkte BC vor, so genügt derselbe, um für alle andern möglichen Kegelschnitte derselben Art die Tangentenpaare durch x zu finden — ohne dass diese Kegelschnitte selbst gezeichnet zu werden brauchten. Man führe durch den Punkt P_1, den jener erste Hilfskegelschnitt ε liefert, beliebige Gerade, welche in $S_1 S_1'$ u. s. w. treffen [Fig. 48]. Die Verbindungslinien von x nach den Punkten $S_1 S_1'$ des Kegelschnitts U geben je ein Tangentenpaar für einen weiteren durch BC gehenden doppelt berührenden Kegelschnitt."

§ 24.

Jene beiden Kegelschnitte, welche durch AB gehend (Fig. 44), einen vorgegebenen Kegelschnitt U vierpunktig berühren, berühren denselben in je einem von zwei Punkten zz', welche sofort fest bestimmt sind, sobald der Kegelschnitt und jene Punkte AB selbst vorgegeben (§ 21).

Wir unternehmen nunmehr die Herstellung dieser Kegelschnitte durch einfache Construction in der Ebene.

Offenbar ist in z' selbst (Fig. 44) ein Berührpunkt für eine an ihn von x aus geführte Tangente. Will man nun die andere Tangente an ihn durch x (dieselbe schneidet übrigens die Gerade zz' im Berührpunkte μ' dieser Tangente an den gesuchten Kegelschnitt), so construirt man (§ 23) einen beliebigen Hilfskegelschnitt ε, durch AB gehend, und in doppelter Berührung mit U, und bestimmt mit dessen Hilfe den Punkt P_1. Alsdann zieht man $z'P_1$, welches den Kegelschnitt U

zum zweitenmale treffe in Z. Die Gerade xZ ist die gesuchte weitere Tangente des gesuchten Kegelschnittes, ihr Schnittpunkt mit zz' ein weiterer Punkt desselben. Vom gesuchten Kegelschnitte sind demnach sechs Bestimmungsstücke bekannt, nämlich die Punkte AB, sowie die beiden Tangenten durch x mit ihren Berührpunkten.

§ 25.

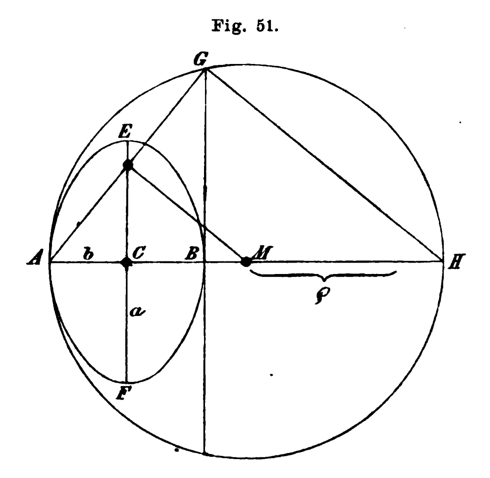
Nur noch ein ganz kleiner Abstecher möge ins Gebiet des Metrischen gemacht werden: wir wollen zeigen, wie sich die Bestimmung des Krümmungshalbmessers für den Osculationskreis im Endpunkte der kleinen*) Axe der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

geradezu elementar aus den Eigenschaften des Bildes einer Kugel mit einer ebenen Schnittcurve ergibt.

Die Figur 51 stelle eine Kugel vor mit dem Halbmesser

Fig. 51.



$\mathfrak{p}$, B sei ein Punkt auf der vorderen, dem Beschauer zugekehrten Seite derselben; eine Ebene sei — symmetrisch zur Halbirungsebene AMH der Kugel — durch den Punkt B

*) Für den Endpunkt der grossen Axe vergl. die zweite Lösung unsres Hauptproblems (§ 14, I).

und den zu äusserst nach links sichtbaren Punkt der Kugel, A, gelegt worden, wobei B beliebig auf dem Kugelkreise AMH angenommen wurde.

Handelt es sich darum, das Bild der so entstandenen räumlichen Schnittcurve zu geben, so weiss man, dass die entstehende Curve jedenfalls eine Ellipse vorstellen wird, die mit dem Kreise, der den Umfang der Kugel abbildet, eine vierpunktige Berührung hat (§ 21).

Verfolgt man nun genau den Weg, den man einschlagen muss, um die *Ellipse* richtig zu construiren, wenn die *Kugel* vorgegeben und die kleine Axe AB, so müssen sich Beziehungen ergeben, die umgekehrt den Radius der Kugel ausdrücken durch die Dimensionen (*beide* Axen) der Ellipse.

Die Curve $AEBF$ ist also das Bild eines Kreises; ein Durchmesser desselben, AB, erscheint verkürzt zur kleinen Axe, ein anderer erscheint als grosse Axe, übrigens unverkürzt. Um die Länge von EF zu bestimmen, wenn der Punkt B in der ebenen Figur 51 vorgegeben, wird man auf AM die Senkrechte BG in B errichten, die Strecke AG stellt dann den *wirklichen* Durchmesser direct vor des, zur Ellipse umgestaltet erscheinenden, Schnittkreises.

Diese Länge AG hat man also der grossen Axe EF des Bildes der Schnittfigur zu geben (*ebene* Figur 51), soll letzteres richtig werden für vorgegebenes AB und AM.

Vermöge der rechtwinkligen Dreiecke AGH, ABG herrscht zwischen den drei Grössen AH, AG, AB die Proportion: $\frac{AH}{AG} = \frac{AG}{AB}$.

Nun ist AH das Doppelte des Krümmungsradius AM für den Punkt A, AG das Doppelte der „Halbaxe“ genannten Grösse a in der Ellipsengleichung, AB als Länge der kleinen Axe mit $2b$ zu bezeichnen.

Es besteht nun auch noch zwischen den Hälften von AH, AG, AB dieselbe Proportion; und man hat $\frac{\varrho}{a} = \frac{a}{b}$; $\varrho = \frac{a^2}{b}$; was zu beweisen war.

und geht dann durch reichliche Zahlenbeispiele für Entwickelungen, die beim Vortrag gegeben werden, zu schwierigeren Übungen, welche über den Rahmen des von Dozenten zu Gebenden hinausgehen. In einem später erscheinenden zweiten Teil will der Verfasser die Antworten auf die Wiederholungsfragen, die Auflösungen der numerischen Beispiele und Anleitungen zur Lösung der schwierigeren Aufgaben mitteilen.

Hesse, Dr. Otto, weil. Professor am königl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger. Dritte Auflage. [XVI u. 546 S.] gr. 8. 1876. geh. n. ℳ 13.—

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Koordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Funktionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disziplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedlerschen Übertragung des Salmonschen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Litteratur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dafs der Verfasser desselben vor allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Teile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelles Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft mufs Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] — Für Leser, welche mit den nötigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorieen erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w." [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

——— Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Dritte Auflage, revidiert von Dr. S. Gundelfinger. [VIII u. 230 S.] gr. 8. 1881. geh. n. ℳ 5.20.

„Man kann ohne Übertreibung behaupten, dafs es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 230 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w." [Schlömilch in d. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik.]

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weifsenburg i. E., elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 8.80.

Da aufser den von Geiser unter dem Titel: „Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung" herausgegebenen Vorlesungen Steiners in der deutschen Litteratur kein Werk vorhanden ist, welches eingehend und ausführlich die Kegelschnitte elementar behandelt, so hat es der Verfasser unternommen, in elementar-synthetischer Form die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten. Diese Form der Darstellung „elementar", weil sie die Projektivität nicht benutzt, und „synthetisch", weil sie die Eigenschaften der Gebilde nicht durch Rechnung, sondern unmittelbar an ihnen selbst ableitet, wird manchem, dem es nicht vergönnt war, auf der Universität projektivische Geometrie zu hören, ihres einfachen Charakters wegen eher Veranlassung sein, sich mit den wesentlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte vertraut zu machen. In den Vordergrund treten die harmonischen und Polareigenschaften. Zu ihrer Untersuchung wird das harmonische Gebilde unmittelbar angewendet, während die projektivische Geometrie dasselbe zunächst benutzt, allgemeine Beziehungen herzustellen und aus diesen jene Eigenschaften herzuleiten.

Die Darstellung geht von einer gemeinschaftlichen Erzeugung der drei Arten von Kegelschnitten aus, leitet aus ihr die Brennpunkts- und Polareigenschaften ab, führt sie darauf in die übrigen bekanntesten Erzeugungsweisen über, um auch aus ihnen jene Eigenschaften wiederholt zu entwickeln. So ist die Polarentheorie in fünffacher Art elementar dargestellt.

Zur leichteren Handhabung der harmonischen Eigenschaften ist ein von Möbius zuerst bemerktes Übertragungsprinzip unter dem Namen der harmonischen Verwandtschaft benutzt. Dasselbe gestattet in elementarster Form ohne aus der Ebene herauszugehen die Eigenschaften der Kreise und Kreisbüschel auf Kegelschnitte und Kegelschnittbüschel zu übertragen. Letztere sowie die reziproken Gebilde, die Kegelschnittscharen, werden in ihren wesentlichsten Beziehungen untersucht. Ihnen schliefst sich die Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung an. Den Berührungskreisen der Kegelschnitte, den doppelt berührenden sowie Krümmungskreisen ist ein besonderes Kapitel zugewiesen.

Vorausgeschickt ist ein Abrifs: die Theorie des Kreises; den Schlufs bildet eine kurze Darstellung der Haupteigenschaften projektivischer Gebilde und eine Zahl von Lehrsätzen und Aufgaben, die teils den gegebenen Stoff erweitern, teils zu seiner Einübung das Material liefern sollen.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Vierte Auflage. [XXIV u. 701 S.] gr. 8. 1878. geh. n. ℳ 14.40.

„Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grofse Menge von mehr als vierhundert grofsenteils vollständig durchgeführten Aufgaben.“ [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik.]

Schwering, Dr. Karl, Oberlehrer in Coesfeld, Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten in der analytischen Geometrie der Ebene. Mit in den Text gedruckten Figuren und zwei Figurentafeln. [VI u. 96 S.] gr. 8. 1884. geh. n. ℳ 2.80.

Die Theorie der Linienkoordinaten erscheint in den gangbarsten Darstellungen noch immer nicht in der Einfachheit, die ihr erteilt werden kann. Historisch gelang es bei weitem zuerst, den Begriff der Punktkoordinaten klar auszusprechen, und erst in neuerer Zeit wurde aus diesem Begriffe die Auffassung der Geraden als Raumelement gewissermafsen entlehnt. So pflegen nun aber noch die Lehrbücher zu verfahren. Sie leiten aus der Gleichung der Geraden den Begriff ihrer Koordinaten ab. Trotz aller Verehrung, welche man historischen Methoden mit Recht entgegenbringt, dürfte aber gerade in diesem Falle eine Abweichung von nicht geringem Nutzen sein. Denn das aus der angezogenen Betrachtung sich ergebende Linienkoordinatensystem verwendet als Bestimmungsstücke der Geraden nicht direkt anschauliche Strecken, sondern deren reziproke Werte. Zu dieser nicht sachlichen, sondern durch die Behandlungsweise künstlich erzeugten Schwierigkeit tritt eine zweite kaum minder bedenkliche. Die Theorie der Linienkoordinaten erscheint meist an einer ziemlich vorgerückten Stelle des Lehrganges und wird dann sofort auf trimetrische Systeme angewandt. Diese Einführung pflegt sich als durchaus sachgemäfs in eleganten Rechnungen und Entwicklungen zu bewähren, aber der Anfänger hat sich doch nun in zwei ihm fremde Anschauungen hineinzufinden. Diese doppelte Arbeit kann man ihm teilen und dadurch sehr erleichtern.

In der vorliegenden Schrift wird nun der Versuch gemacht, die oben gekennzeichneten Schwierigkeiten zu vermeiden. Der Verfasser wendet ein eigenes System von Linienkoordinaten an, welches demselben schon früher gute Dienste geleistet hat. Vergl. d. Abhandlung desselben Zeitschr. f. Math. u. Ph. Bd. 21, S. 278 ff. Das System beruht in der Hauptsache auf dem Gedanken, einen Punkt des Koordinatendreiecks in das Unendliche zu verlegen und zugleich den Gleichungen der imaginären Kreispunkte die möglichst einfache Form zu erteilen. In der That ergiebt sich ein System, welches an Klarheit und Einfachheit keinem andern nachsteht und zugleich, wie Herr Schlegel l. c. Bd. 23, S. 195 nachgewiesen hat, den grofsen Vorzug besitzt, dem Cartesischen Punktkoordinatensystem genau reziprok zu sein.

Weifsenborn, Dr. Herm., Professor am Realgymnasium zu Eisenach, Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten. [VIII u. 236 S.] gr. 8. 1876. geh. n. ℳ 7.—

Nachdem hauptsächlich durch die Salmon-Fiedlerschen Werke die Aufmerksamkeit auf den Wert der Dreipunkt- und Dreilinien-Koordinaten gelenkt worden, ist die Theorie derselben in zwei Schriften von Heger und Schendel als ein zusammenhängendes, organisiertes Ganzes bearbeitet worden. Von beiden unterscheidet sich die gegenwärtige dadurch, dafs einmal der Zusammenhang der trimetrischen mit den orthogonalen Punkt- und Linienkoordinaten mehr hervorgehoben ist, und dafs ferner, während von den Eigenschaften der Kegelschnitte nur die wesentlichsten aufgenommen werden, die allgemeinen Gesetze der Gleichungen zweiten Grades, also die Klassifikation der Kegelschnitte je nach den verschiedenen zu Grunde gelegten Koordinatensystemen, sowie die Transformation der Gleichungen aus einem System in ein anderes ausführlich berücksichtigt sind, wobei die Bedeutung der Diskriminante und ihrer Partialdeterminanten, sowie einiger Eigenschaften der Determinanten, deutlich hervortritt.

